# 音波のよもやま話（その４２）
# 屈折（スネル）の法則（その２）

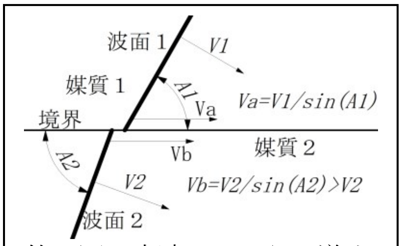
㈲アイ・エス・エル　宇田川義夫

## ◆はじめに

前回音に関するスネルの法則は余り根拠のない近似式で、屈折角が大きくなると合わなくなる事を話した。境界での波面が必ずしも連続ではない事も話した。今回はまず波面の連続性を仮定しないでスネルの法則を導出する。

## ◆波面の連続性を仮定しない導出

スネルの法則は簡単なサイン関数なので、色々導出の方法は考えられるが、ここでは波面の連続性を仮定せず、音速のみから導出する。



第１図　音速のみからの導出

第１図で媒質１内の平面音波１が境界に当たり、媒質２内に音波を伝搬したとする。媒質１内の波面が境界を移動する速さ *Va* は、入射角を *A1*、媒質１内音速を *V1* として

$$Va = \frac{V1}{\sin(A1)} \geq V1 \quad \text{式（1）}$$

境界を移動する媒質２内の音波面端の速さ *Vb* は屈折角を *A2*、媒質２内音速を *V2* として

$$Vb = \frac{V2}{\sin(A2)} \geq V2 \quad \text{式（2）}$$

両媒質内の波面にずれが有っても、媒質１から媒質２へ連続的に変換していれば、両方の速さは同じなので、

$$Va = Vb = \frac{V1}{\sin(A1)} = \frac{V2}{\sin(A2)} \quad \text{式（3）}$$

とスネルの法則が導かれた。

但し、これも第２媒質に平面波が発生するとしている。*Va* が *V2* を超えると波面が形成できない。*Va*＝*V2* となるのは屈折角 *A2* が 90 度の場合である。屈折角が 90 度を超える様な場合、どうなるのであろうかの答えは導けない。

この導出では波面は平面であると仮定している。平面となると言うエビデンスは無いし、平面にならない場合もあろう。

## ◆物理と数学

前章で媒質１で波面１が... と書いたが、領域１で直線１が速度 *V1* で移動し... としても同じ結論となる。波面でなくて良く、何らかの直線であり、境界を跨いでの条件が同じであれば良い。波面に垂直な線を考えれば光線或いは電束などのレイでも同じ理屈になる。

波面と言うと物理学と思われがちだが、「線」とすると単なる図形の数学(幾何学) である。

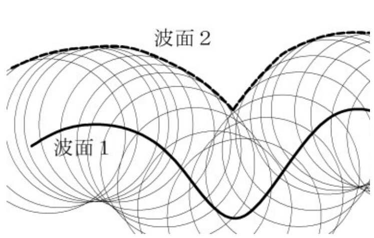
屈折後、波面２、即ち線２の強度に関して何の情報も得られない。単に「形、図形」だけである。形は学術的には「情報」と呼ばれる。

物理学は情報の科学ではなく、エネルギーの科学である。前回も含めスネルの法則の導出は単に数学を操作しているに過ぎない。スネルの法則は、エネルギー或いは音圧には言及していない。スネルの法則の導出は物理学ではない、単位数学の遊びと言える。

以前フェルマーの最短時間の法則が純粋数学の二分法から導けると書いたが、これも物理学ではないから数学で導けるとも言える。

ホイヘンスの原理はエネルギー保存則や波動方程式を使って、物理的意味のない事は証明で

きる。これもある曲線と一定距離の曲線を求めよと言う幾何数学の問題と同じである（第２図)。



第２図　ホイヘンスの原理

ホイヘンスの原理もスネルの法則もコンパスと多用し幾何学的手法で物理問題を解明しようとしていたニュートン以前の時代の一つの結論である。何れもエネルギー（音波の強度）に関して何の示唆もない。物理も数学も区別のない時代の一つの結論である。

物理現象は誰もが納得する基本的な原理法則を元に説明されるのが原則で、音波はニュートン力学に基づく振動現象なので、屈折の方程式は、音の波動方程式の導出同様に「釣り合い方程式」から導くのが正しい物理的手法である。可なりの紙面が必要なので Kuhn.G.J. と Lutsch などによる文献等を参照願いたい。FDTD は同じく、｢釣り合い方程式｣を用いているので、参考文献と同じ結果が期待できる。光弾性可視化装置画像と二次元 FDTD の計算結果画像は、似た図形と成る事を確認しているので以降特に連載の次回から FDTD の結果を多用する。但し音圧強度などに関しては光弾性可視化の測定精度誤差が大きいので、詳しい比較が出来ていない。

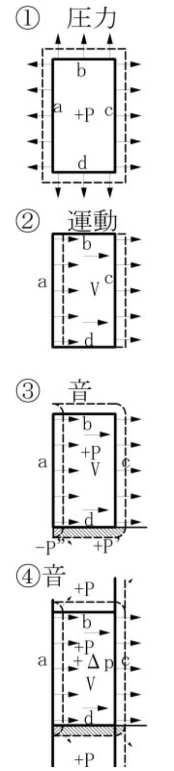
スネルの法則で重要な事は、暗黙の内に平面波や無限大振動子など、極端な理想状態＝数学で考えており、それと同じ条件であれば、確実に高い精度で成り立つと考えられる。

実際の有限寸法を持った振動子やビームで音が広がり、例えば波面が直線と言う事はありえない。以降有限のビームの話をする。

## ◆BED に関して復習

回折波は「物」の後ろに回り込む意味でそう呼ぶ。筆者らは、この呼び方は現象の本質を示さないので、BED（Beam Edge Diffusion、ビームの端の拡散）と呼んでいる。｢物」が原因ではなく、ビームに「端」が有ることが原因だからだ。有限振動子からのビームにも端が有る。

第３図①はある瞬間、圧力のみが abcd 面内に有る場合(実線)で、少し時間が経つと何方の方向にも広がって破線の様に成る。②は運動のみが有る場合、一般的な移動である。図では一定時間経つと速度方向に移動して破線となる。③は①と②が重なった音の場合で、(粒子）運動と（音の）圧力が同じエネルギー量有る場合で、少し経つと、a 面では圧力 P で広がろうとするエネルギーと運動 V が相殺して運動は止まる。c 面は圧により面の右先に新たな運動 V が始まる。b,d 面波運動の向きと圧力が異なるので、圧力により広がる。音速一定であれば､その結果破線の様に音が移動すると同時に広がる。探触子から音が出ると､そのビームには端があり、図の bd 面の様に広がっていく。障害物は必要なく、端があれば良いのである。図③の様に上下に P が正の音圧であれば､静の音圧 P'として広がるが､波面の後端部分は媒質が小さな矢印で書いた方向に移動するので､逆圧に成って、この場合負圧-P”として広がる。前者を外(側)BED、後者を内(側)BED と呼び区別している。ここでは音圧+P が有った場合を説明したが、相対的な話で、④の様に周りとΔp 異なる音圧部分があると、そこが広がる。詳しくは連載の 16 回以降の BED に関する記述を参照されたい。



第３図　圧力、運動と音

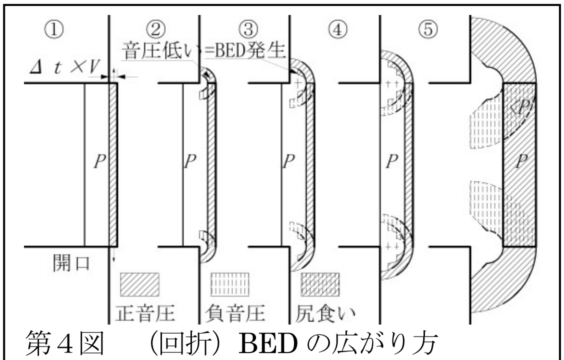
従って明確な端がなくても、音圧が波面の位置により変化する場合、広がる。アレイ探触子があたかも１枚の振動子と同じように作用するのは、この BED により、近くの音の無い部分に音が流れ込むからである。

なお、①で単に広がると言ったが、実際は周囲の一部の圧力が一度音に変換して全方向に広がっていく。②では、周りが空間では単に移動するが、周り全体が同じ媒質であると、右には c 近傍の運動が音に変換して伝わり、左 a 近傍の運動は逆圧の音として伝わる。①②は一般的に言う音の波動方程式の「初期条件」である。色々な初期条件とその後の動作は以前の連載の一次元 FDTD シミュレーションの時に説明した。各種アニメーション動画が http://www.i-sl.co.jp/independanceanime.html にあるので、理解の参考にするとよい。

ニュートン力学では質点として考えたが、点では無い通常の物体（一般に弾性体と呼ぶ）の場合、運動も圧力も移動や変化には音が関与している。

◆実時間差分（微分）

物理現象は時刻経過とともに状態が変化する。今から微小時間$\varDelta t$ 経ったら、どうなるかを考え、更に$\varDelta t$経ったらと考えていくと、実際の現

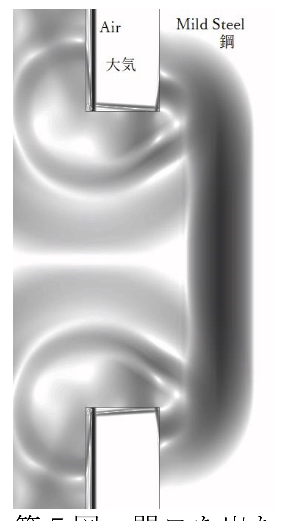



第４図　（回折）BED の広がり方

象を理解しやすい。$\varDelta t$の極小は微積分の $dt$で、微積分を完成させたニュートンもニュートン力学を生み出すときに同様の手法を用いたと思われる。当時は微積分が一般的でなかったので、著書プリンシピキアでは現代人には難解な幾何的手法を用いている。また、音のシミュレーションに使う FDTD 法は微小時間$\varDelta t$間隔でコンピュータを用い次の状態を単純に随時繰り返し計算させているに過ぎない。以降実時間差分的手法で各種現象を考える。

◆BED と回折波

開口(振動子)から音が出る場合を考える。開口に入ってきた平面波音圧 P の音が、開口から出て$\varDelta t$時間経過した状態を第４図①に示す。音速 $V$だと、$\varDelta t \times V$だけ頭を出している。図上下の出っ張った音の側面には圧が無いので、矢印の方向に出っ張ろうとする。音速は何方の方向にも一定とすると、更に$\varDelta t$経つと、その強度に関しては知れないが、広がりは②の様になっているであろう。波面の外側に行くほど音圧は低いであろうから、その音圧変化差分、各部で BED が発生する。イメージ的には③④の様になっていく。BED は単に広がるのではなく、ビームの端に行くほど波長が伸びる。元の波形の先端$\varDelta t$時間相当を考えたが、全体は①~④の重ね合わせであり、⑤の様に成る。内側 BED の影響(尻食い現象)は上記で議論しなかったが、第５図が FDTD の結果である。振動子からの音は開口を通過した平面波と同じと考えられるなどと書いてある書物もあるが、実際は何方も異なる。例えば振動子は前方と後方に音が出て、後方に出た波が影響する。開口材料の面で反射やモード変換波が発生し重なり区別するのも大変である。開口が固体だと、透過、縦波と横波の相互変換などが起き更に判別が困難になる。別の言い方をすると、開口を平面波のみが出る状態は自然界には存在しない。第３図は頭の中だけの議論である。が、現象の一部を説明できるのも確かである。

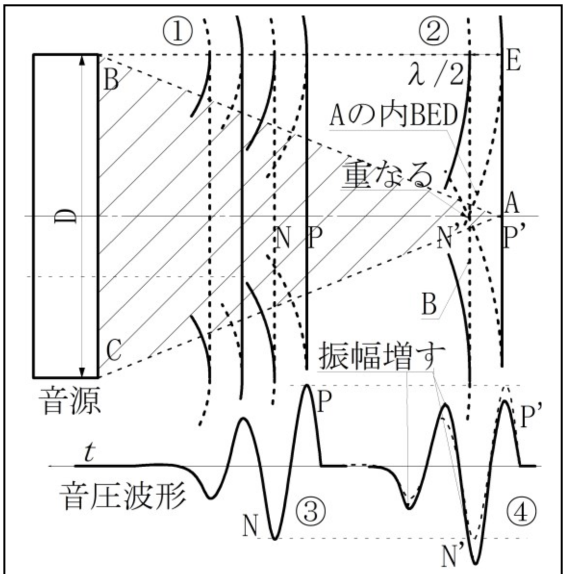



第５図　開口を出た音の FDTD

◆BED と近距離音場限界

端のある有限ビームが広がり、特に内側 BED は（送信時の）近距離音場限界に関係する。ま

ず第６図①③の様に減衰振動する音があるとする。伝播して三角形 ABE で AB と BE の長さの差が $\lambda/2$ になる様な位置 A に来た時、先端の




第６図　BED と近距離音場限界

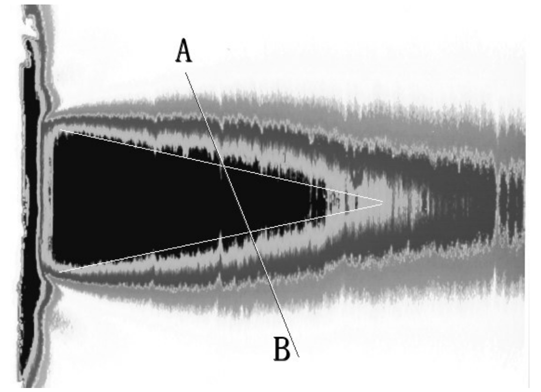
振幅の高い正 P と負 N の波は P'と N'となる。P'は BED にエネルギーが流れるから振幅が多少減るかもしれない。N'の平面波部分もやはり BED にエネルギーを与えて減るであろう。が P が発生した内側の BED が重なり増える。四角形の音源の場合上下左右からの BED が重なる。円形音源では全周からの BED が中央に重なる。その為振幅がより増える。④の様に振幅が変化する。この状態が近距離音場限界である。図の ABE の三角形と $\lambda/2$ から近距離音場限界距離 $N$を導くと

$\boldsymbol{N} \approx \frac{\boldsymbol{D}^2}{4\boldsymbol{\lambda}}$式（4）

前の波面の BED が、続く後ろの波面中央に強く影響している状態と言える。音源が台形など対称性の少ない形の場合、影響は弱くなる。円形振動子では端の全周からの影響を強く受ける。

◆平面波の音圧が一定の領域

ビーム中心を考えると、近距離音場限界内では先端初動振幅は安定しており、近距離音場限界外だと、球面波又は円筒波として広がり距離の一乗又は二乗に音圧は反比例する。一定の速さで平面波が、BED に変換すると仮定すると、平面波の音圧振幅が一定の領域は同図 ABC の三角形の領域である。第７図に光弾性可視化により測定した圧力ピークの分布を示す。探触子配置した面近くは、錘で押えた探触子からの応力とガラス内部在留歪などにより輝度が変化しているが、第６図同様、概略三角形をしている事が判る。数種の発生音波が半波の広帯域探触子を試したが、三角形か少し膨らんだ画像となっている。

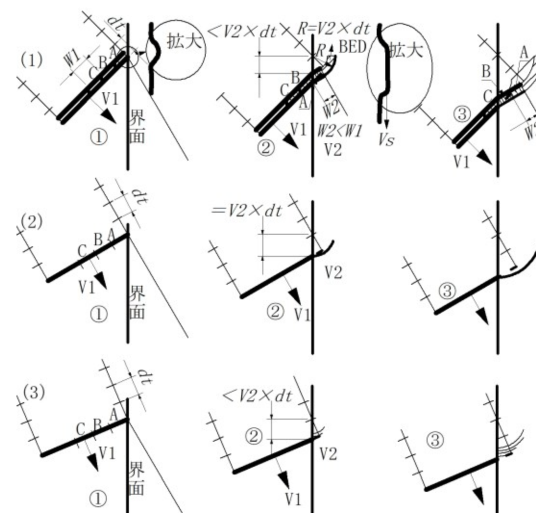



第７図　可視化装置による音圧分図

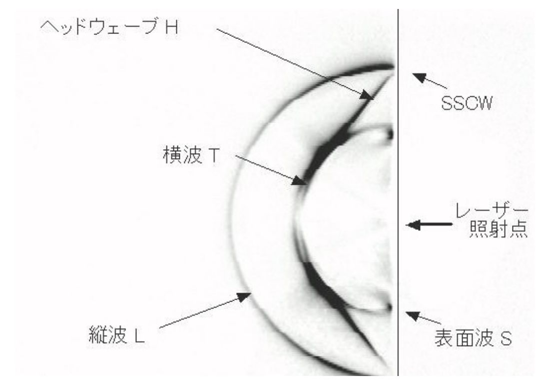
◆屈折の詳細

端のある有限ビームの屈折現象を机上で考える。探触子のクサビ中でも音は広がるが、境界に当たるまで広がらなかったとし、反射波や色々なモードの波も発生するが煩雑になるので対象の入射と屈折波しか書かない。音は正の半波として話す。波数が多い場合は、この時刻の異なる複数画像をずらして重ね合わせればよい。第８図⑴①で波面 A の端が境界に当たると、その圧力と運動で、境界は誇張拡大図の様に出っ張るであろう。以前スネルの法則を導く時、境界が移動しないとしたが、ここでは移動する。実際にレーザー変位計などで測定すると移動している。この出っ張りは方向を持った運動で、一定の方向に強く円柱面（又は球面）的波が発生する。垂直の場合はレーザーなどを材料表面に当てて、表面近傍を膨張させたのと同じ様な状況であろう。以前掲載したレーザー音波発生

の様子を再度第９図に示す。色々な波が発生しており、第８図(1)でも同様と考えられる。ここで重要なのは、ビームの端が入射すると、色々




第８図　屈折の詳細




第９図　レーザーによる表面微小音源の光弾性可視化像

なモードの屈折波が発生しそれも、四方八方に向かうと言う事である。$dt$ 時間の間に A の残りの部分が境界面で一定の速度を持て続いて押し出されるので、②の様に BED に A の部分のエネルギーは移動する。この時の界面の出っ張りの進行速度 $Vs$ は媒質２の音速 $V2$ より遅いとする。

BED の半径 $R$ は区間 A が媒質１の音速 $V1$ で移動する時間 $dt$ で媒質２の音速 $V2$ で移動できる長さ $dt\times V2$ である。BED にエネルギーを与えるより、多くの波素部分 A, B, C が界面を通過すると、平面波的となるであろう。界面近くでは力学的釣合が取れた状態で、BED の発生が少ないので、離れたとこより音圧強度が強い。境界から離れるほど BED にエネルギーを与え強度が下がると考えられる。

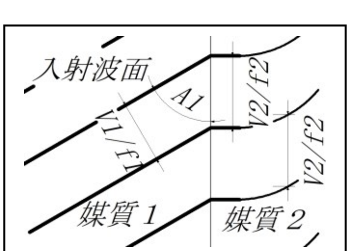
媒質１での波素 A の幅 $W1$ は、媒質２で $W2$ と小さくなり、その為、平面部分のビーム幅は狭まる。後述するが、昔は一部の探触子メーカは実質振動子が小さくなったと考え、等価振動子径や実効ビーム径をカタログに記載していた。

第８図(2)の様に入射角度が大きくなり、丁度第２媒質の音速 $V2$ と境界を波面が出っ張る進行速度が同じ場合、$dt$ 前に発生した BED の半径 $R$ と出っ張りの進行速度が一致するので、生成された波面が平面状には成らず円弧となる。臨界角の状態である。

更に入射角が大きくなると第８図(3)の様に波面の境界面を叩く速度 $Vs$ が $V2$ より遅くなり、第２媒質では発生する音が、その前に発生した音に追い付かず、波面が分散する。この状態では波長が伸びる。即ち主周波数成分は入射波より低周波側に変化する。

◆大きな屈折角での周波数変換

探触子から出た音の周波数は伝播に従いそれほど変わらないと思っている人も多いが、実際には可成り変化する。特に広帯域探触子を使用して界面でのモード変換を繰り返す時には数分の１の周波数になる事もある。受信時に探傷器のダンピング抵抗による低域カット特性によりエコーとして表示されない事が多いので、気が付かない事が多い。ダンピング抵抗を大きくする、或いは二探触子法として受信に低周波の探触子を使うと気が付く。この現象を上手く使うと、今までできなかった検査をする可能性がある。この現象は対象物の形状による所謂ガイド波への変換である。一方前述の様に臨界角を超




第１０図　臨界角を超えた場合の周波数変換

える角度でも周波数変換が行われる。第１０図の様に臨界角を超えた屈折波の周期を考える。境界での角度 A1 で入射する入射波の間隔と、屈折波の波長は一致するので、

$$\frac{V1}{f1}\cos A1 = \frac{V2}{f2} \qquad 式(5)$$

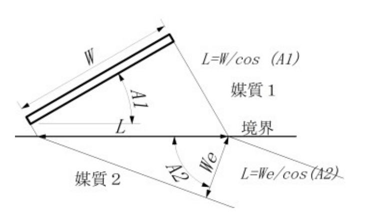
が成り立ち

$$f2 = \frac{V2}{V1}\frac{f1}{\cos A1} \qquad 式(6)$$

となる。ここで *V1*、*V2*、*f1* と *f2* は媒質１と２での周波数と音速である。
但し臨界角以上の場合で、*A1* の取る範囲は狭く、大幅な周波数変化は無い。利用価値はあまりないと思われる。

## ◆等価振動子サイズ

屈折すると、例えば10×10 ㎜の振動子では左右方向は 10 ㎜相当だが、上下屈折方向はビーム幅が狭くなる。屈折後は、振動子のサイズが小さくなったのと同じと考えられる。ビーム幅が狭く成れば、より音は広がりやすい、即ち指向角が広がる。振動子のサイズを W、屈折後の等価振動子サイズを We とすると、第１１図から




第１１図　等価振動子サイ

$$We = \frac{\cos A2}{\cos A1}W \qquad 式(7)$$

となる。これを基に PMMA 楔と鋼での入射角と横波屈折角と等価振動子サイズにする係数の関係は以下の表となる。

| 入射角 | 屈折角 | 等価振動子係数 | N0 短縮率 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | ×1.00 | ×1.00 |
| 8.5 | 30 | ×0.958 | ×0.92 |
| 17.0 | 45 | ×0.887 | ×0.79 |
| 25.2 | 60 | ×0.742 | ×0.55 |
| 53.5 | 70 | ×0.572 | ×0.33 |
| 55.5 | 75 | ×0.457 | ×0.21 |
| 57.2 | 80 | ×0.320 | ×0.1 |
| 58.2 | 85 | ×0.165 | ×0.03 |

周波数の高い音波＝超音波が良い直進性があるので、超音波探傷に使える言う基本を満足するには、波長に比べ十分大きな振動子であることが重要で、等価振動子サイズ係数を考慮する必要がある。

屈折角 45 度 10 ㎜サイズの振動子と同等の指向角の探触子を屈折角 70 度で実現するには振動子サイズを1/0.32≒3 倍にしないといけない。

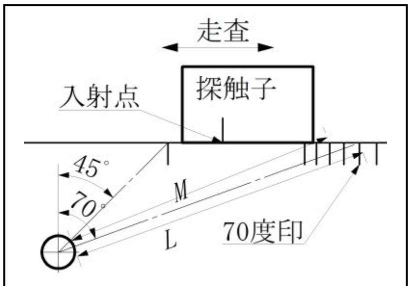
垂直探触子で 5MHz の 10Φ、斜角探触子5MHz で 10x10 ㎜と言った市販探触子サイズは良く使われるビーム路程で容易に欠陥評価が出来ると言う経験で決まったものである。指向角や近距離音場限界がこの程度から離れると、一般市場向けには使いにくい製品になる。

等価振動子サイズは指向特性を想定する上で便利なので前表の概略のイメージを掴むと良い。

1970 年代の初期には近距離音場限界におけるビームの左右方向幅と上下方向幅（高さ）を測定し、実効ビーム幅として、データシートに記載している探触子メーカもあった。測定が大変で、またユーザーがそのデータを有効に使わなかったので、その後記載は無くなった。45 度横波屈折角の場合、振動子の縦横サイズを変えて例えば 8×9 ㎜とすると、縦横大体同じビーム幅となる。鋼に対するアクリル楔の場合横波 70 度屈折角では縦横比を 2 倍にする必要があり、45 度屈折角探触子と同じサイズのケースに組み込めない。

## ◆屈折角測定用機械加工試験片の問題

A1 試験片の様な屈折角を測る試験片は振動子が小さい場合や周波数が低い場合に正しく測定出来ない欠点がある。その原因を説明する。試験片を自作する



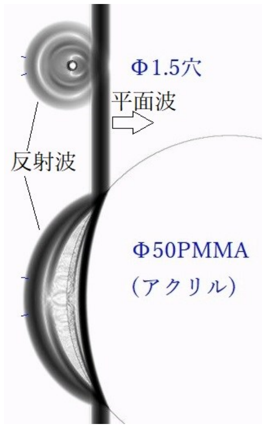

第１２図　機械加工試験片

場合にも重要な情報である。第１２図の様に各角度で横穴を狙った位置に印を付け、一探触子法で穴のエコーが最大になる探触子位置から屈折角度を求める。穴は円形で穴からは指向性の無い円柱波が探触子に戻ってくると考えられ、別の言い方をすると、あたかも線音源から音が発せられた状態と同じであり、受信指向角が測れることになる。

## ◆横穴の反射特性

屈折角を測定する反射源として横穴が A1 試験片には使われる。大きな穴と小さな穴がある。

この穴の反射特性を FDT D で模擬して見よう。第１３図に 1.5Φと 50Φの穴での平面波の反射の様子を示す。二次元 FDTD で模擬した。反射波面の角度が±10 度の位置に印をつけた。この角度での音圧は中央に比べ 1.5Φでは 0.5%程度、50Φでは 3%程度低い。1.5Φと 50Φの中央反射音圧強度は反射後 6 ㎜この図の位置では 3 倍ほど異なる。穴から遠くなると 1.5Φの場合急に弱く成る。



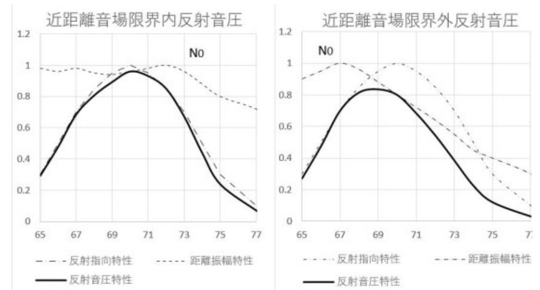
第１３図　1.5Φと 50Φでの反射

なお、大きな穴にはアクリルが埋め込まれ片側が導電性処理されている。これは水晶時代に水晶振動子の表電極として対象の金属を使ったため必要であった。今は必要ない。また、厚さが 23 ㎜で本体の 25 ㎜より薄い。これは鋼の縦波で 50 ㎜相当になり、校正にも使われた。今はアクリルが無い試験片が販売されている。

## ◆前後走査に伴う反射音圧強度

穴からの反射波が無指向性であるとして、穴の位置と近距離音場との関係を屈折角 70 度を例に考える。穴の位置が近距離音場限界の外だと円柱は又は球面波的領域なので、距離の一乗か二乗に反比例して送信ビーム音圧の距離振幅特性は下がる。第１４図の右の様に送信音波の指向性特性（一点鎖線）と距離振幅特性（点線）の積相当の音が穴で反射音の強度が角度により変化する。実際の屈折角より小さな角度で振幅はピークとなる。一方近距離限界以内だとビームを第６図の AB 線の様に斜に横切るが、平面波的部分が残っていて、距離振幅特性も近距離音場限界以内は比較的一定の為、探触子の位置による反射音波の変化が少なくなり、探触子の受信指向性をより正しく測れることになる。

探触子の正しい指向角を測定するには近距離音場限界距離の手前に反射穴面が来るような探触子である必要がある。A1 試験片の他 A3 など穴までの距離の異なる試験片があるので、それらを使うのも良いであろう。



第１４図　機械加工試験片穴反射特性例

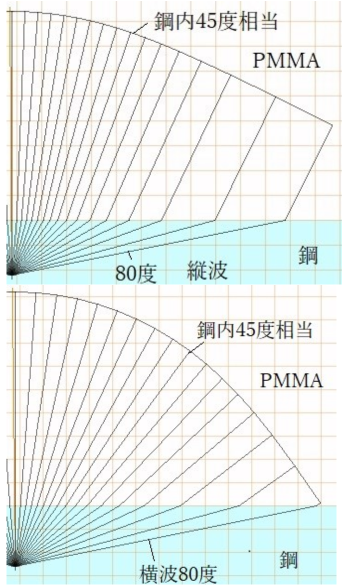
前表の様に近距離音場限界は振動子サイズの二乗に比例するので、振動子サイズを少し大きくしただけでも良い結果になる。

反射源を用いたい前後走査による反射音圧のピークは、スネルの法則より小さめの屈折角となる。

## ◆小欠陥からの音波の受信時シュー内波面

通常の探傷器での一探触子反射法で角度を測る場合、前述の送信時の特性の他受信時の特性を考える必要がある。受信時の指向角のピークは、探触子内の振動子に入ってくる音の波面と、振動子面が一致した場合である。前述の円筒面や小反射体からの音は指向角が広く、探触子の楔に色々な角度で入射してくる。クサビが PMMA で作られた斜角探触子の場合のスネルの法則に依る等伝播時間（等ビーム路程）が生成する波面例を第１５図に示す。波面は平面で

はない。前述の 1.5Φの穴などからの反射波は、近距離音場限界距離よる遥かに遠いと平面と考えて良いが、近距離音場限界距離前後だと平面波として楔に入ってこない。一探触子法の走査では受信振動子面は平面なので、受信波面と一致しない事になる。入射角 0 度か 80 度まで等間隔でレイを描いた。横波の場合、60 度程度、縦波で 45 度程度までは振動子面のピッチが均等で、音圧変化の少ない事が判る。角度が大きくなると段々ピッチが荒くなって、その分音圧が弱く成る。鋼からの角度に依る透過損失の違いと、この理由により、受信時もスネルの法則より小さめの角度で高い振幅が観測される。



第１５図　楔内等位相波面

探触子を前後走査して角度を測る場合、送信時同様受信も常に小さめの角度に計測される。

図の曲面は、アレイに探傷器の受信遅延時間補正相当であり、感度が高い非球面振動子の振動子面形状でもある。

非球面振動子を含め以下のフリー・ソフトにて計算できる。

Aspherical (http://www.i-sl.co.jp/downj.html)

## ◆あとがき

今回は屈折の法則（スネルの法則）は界面を跨いで異なる音速で移動する直線に関する単なる数学で、同じ条件を満たす物理現象なら何でも良く、精度は高い事を述べ、それに関係する理論的な話をした。また、A1 試験片などの問題を机上検討した。次回は屈折に関する主に FDTD による模擬結果を示す。

## ◆今回知った事

（１）　波面の連続性を仮定しなくてもスネルの法則は導出できるが、波面が平面である必要がある。

（２）　スネルの法則もホイヘンスの法則も物理と言うより、数学の図形の問題と言える。

（３）　平面波の送信音圧一定の範囲は、大体振動子面を底辺として、近距離音場限界までの三角形である。

（４）　屈折時、波面が境界を横切る時は、点音源的に考えられ、色々な波が発生している。

（５）　屈折後、実効ビーム幅が背番まるので、等価振動子サイズを考えると指向特性が想定できる。

（６）　A1 試験片に加工した横穴は概略無指向性と考えて良い。

（７）　近距離限界以外だと、前後走査により測定する屈折角は、小さめに測定される。

（８）　楔に入った無指向性反射体からの音は、均等な圧力面を作らず、屈折角が小さい方が音圧が高くなる。

＜参考文献＞

超音波技術入門―発信から受信まで(2020/10 初版 6 刷、日刊工業新聞社)

Y.Udagawa and A.Yamada, "Simulation and Verification Experiment of Radiation Sound Pressure Waveform from Finite Aperture Piezoelectric Transducer", The 34th Symp. Ultrason. Elect. (2013).

USE2013 Analysis and Observation of Sound Wave Field from Finite Aperture Piezoelectric Transducer - Fact-finding of Misfit between Conventional Analysis and Experiment Observation　・

音のスネルの法則,A1 試験片,等価振動子サイズ,小さな穴の指向性

Kuhn.G.J.,Lutsch,Elasticwavemodeconversio
na t a solid-solid boundary with transverse
slip.