

音波のよもやま話 (その41) 屈折 (スネル) の法則 (1)

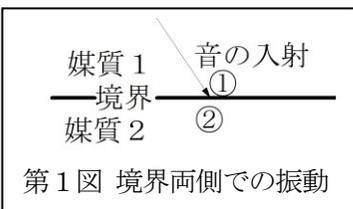
(補)アイ・エス・エル 宇田川義夫

◆はじめに

2つの媒質境界を音が通過する場合、屈折 (スネル) の法則が成り立つ事は高校物理で習う。音波も同様の法則が成り立つとされる。スネルの法則は光学実験的に導き出された経験式である。このスネルの法則に関する疑問の話である。

◆学生時代の疑問 1

半世紀前の学生時代に、ふと不思議に思った。光は重さが無い光子と呼ばれる素粒子の現象で何が有っても不思議ではない。音では、例えばスピーカから音を出す場合、スピーカのコーンが前後運動し、その振動が空気に伝わる。スピーカのコーン面角がどんな角度でも空気に振動は伝わる。所がスネルの法則には臨界角があり、それを超えると透過しない様な記述が多い。第

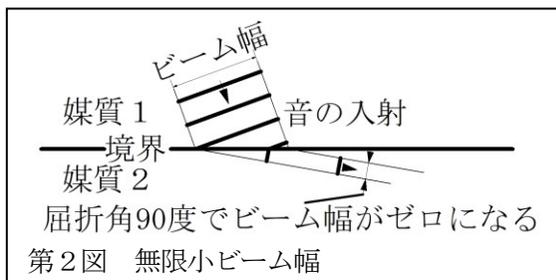


1 図で境界の手前①が振動しているのに、その先②が振動しない。そんな馬鹿な、と思った。

◆学生時代の疑問 2

アクリルから鋼にビームが屈折するとビーム幅が狭くなる。屈折角が90度に近づくと、無限小なる。色々な理論式で、無限小や無限大が出てくる場合、ほとんどの場合は、その式が役立つ範囲である。連載の音速の話で気体分子の速度はマクスエル・ボルツマン分布に従うと書いたが、式からは常温気体中で無限大の速

度もありうる。式からだとは超高速な分子同士が衝突し原子崩壊してしまう。そんな事は知られていないので、当然式は確率の高い部分でのみ通用する近似式である。音もビーム幅がゼロになる事も無かろう？どうなるか？



◆実務での疑問

市販されている標準的屈折 45、60、70 度以外の角度が欲しくなることがある。材料が鋼以外の場合も入射角を変える必要が出てくる。この場合、スネルの法則で計算して、適切と思われる楔を作っても思った屈折角に成らない。例えば鋼材で 85 度の屈折角の楔を作っても 80 度にもならない。70 度以上の屈折角の製品が無いのはそれが理由であろう。屈折角 90 度が販売されているが、JIS の A1 試験片で測定すると、75 度付近である。80 度を超える探触子はお目にかかったことは無い。

これら3つの疑問に関して述べる。

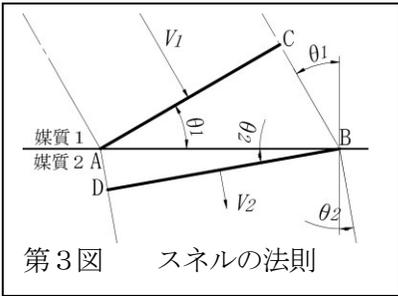
まず音に関するスネルの法則を復習し、市販品の斜角探触子を調べよう。

◆音に関するスネルの法則

第3図の様に、2つの媒質があり、その境界に無限大平面波音が入る場合、入射角 θ_1 と屈折角 θ_2 の間には次の式が成り立つ。

$$\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{V_1}{V_2} \quad \text{式(1)}$$

ここに V_1 と V_2 はそれぞれの媒質の音速である。非破壊検査では波形の立上点の伝播時間を計測する。



センサーとセンサー間で時間的に一番近い経路を伝わった音を計測して、その伝播時間から求める音速は、物理学では初動音速と呼び、音速ではない。物理学で言う音速は平均音速である。

B1-B2 間などを使うと音速に近づくが、波形の変化や減衰の影響は考慮されないため、矢張り厳密には音速ではない。

物体を共振させ、その共振周波数 f_0 と共振している距離 L から求めると、ほぼ音速となる。

$$V = 2L f_0 \quad \text{式(2)}$$

ほぼと言うのは、物体の表面性状は内部と違うし、大気中だと空気に音が伝播してごく僅かだが f_0 が、真空中とは異なる。また、無限大と考えてよい対向超平面でないため誤差が発生する。細長い棒などでは、長さ方向の共振周波数が太く短い棒より低くなる。細長い棒ではポアソン比相当で径が変化しやすい為、実効弾性率が太く短い棒より落ちる。実際的には単純に長さ方向の共振を測定したくても、他の方向の共振成分が計測に影響する。ヤング率(縦弾性率) E と体積弾性率 K の違いと考えて良い。等方性の場合、 E と K の関係は

$$E = 3K(1 - 2\nu) \quad \text{式(3)}$$

ここに、 ν はポアソン比。

◆市販品探触子

海外製の探触子の屈折角は表示と異なると言う人がいるが、試験片自体の規格が各国異なり、それぞれのメーカーは市場に合わせて適切な規格

に基づいて作っている。海外では日本製の探触子の屈折角はいい加減と言われているかもしれない。試験片の材質は、米国などでは一般に手に入る鋼材で作れ、商社が近くの機械工作屋に



作ってもらっても正式な試験片として通用する。実際の鋼材音速の差は1%程度で屈折角に対する影響は少ない。

探触子と楔を分離できるタイプの海外製の探触子(写真1)を試しに測定した。なお、使った振動子は5MHz/2インチ径である。探触子ブロックの周波数を変えるとA1屈折角測定値が変わる。実測楔の角度から計算した屈折角も示す。音速は鋼横波3240m/S、アクリルの縦波2730m/Sを用いた。屈折角の測定はNJISのA1試験片によるが、製品の表示角度と計測屈折角は近い。測定したクサビの角度からスネルの法則で計算した屈折角度は表示から60度を除いてずれる。殆どの国の屈折角度測る試験片の形状はA1試験片と同じで、入射角を試験片で補正し製造しているであろう事が判る。国産の多くの斜角探触子は試験片と代表的探触子の組み合わせで、A1試験片での誤差が小さくなる様な楔角度で作られている。

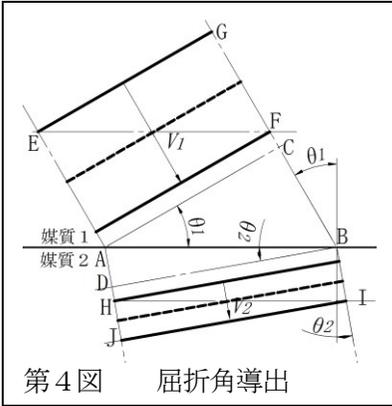
表示屈折角°	45	60	70
A1試験片屈折角°	45.2	59.5	71.5
実測楔角°	35.7	46.8	53.8
スネルの法則計算°	43.8	59.9	73.3

このデータからスネルの法則に何か問題が有るか、A1試験片の問題が有るかは判らない。多くの超音波非破壊試験ではA1試験片程度のビーム路程の検査が行われていて、A1試験片は幾何学的には精度も十分あるので、A1試験片に何らかの問題が有ったとしてもA1試験片程度のビーム路程の検査業務には支障がない。近距離

や遠距離では経験的に誤差が生じる事を知っている。

◆スネルの法則の一般的導出

多くの超音波の専門書にはスネルの法則の導



き方が載っている。ホイヘンスの原理から導く方法があるが、ホイヘンスの原理は物理的な意味がない事は波動方程式から証明できる。ニュートン

以前の微積分が完成されてない時代に、幾何学的手法で物理問題を解いていた時代の最良の説明と言えよう。ホイヘンスの原理からの導出は他書に任せ、ホイヘンスの原理を使わず導出を試みよう。ニュートン自身は多分微積分を多用して論理展開したであろうが、著書「プリンシピア」では微積分を使っていない。当時微積分を理解する人が少数だったからだろうが、読んだ小生も＝現代人にとっては「プリンシピア」は難解となってしまった。

波面を第4図の様を考える。波面E-Gが屈折してJ-Iとなる。波面は伝搬方向に直角で、線分ABは両方の媒質に共通部分である。線分ACは線分AB面に入射する時の波面、線分DBは線分AB面を出た時の波面と考えると。

$$BC = AB \sin \theta_1$$

$$AD = AB \sin \theta_2$$

波面は媒質1内でCD移動すると、媒質2内ではAB移動し、音速相当なので

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{AD}{BC}$$

従って、

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{AB \sin \theta_2}{AB \sin \theta_1} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \quad \text{式(4)}$$

となってスネルの法則が導けた。

これもホイヘンスからの導出同様「ABが移動しない」＝「振動しない」＝「音でない」ことを暗黙の前提にしていて、自己矛盾を起こしている正確性の無い解法だ。ただし、実際の音波では無視できる。BC長さを1秒の伝播距離とすると鋼では概略6000mだ。一方探触子から出る音の変位は多くて1μm以下。AB面の位置変化は無視できる。

しかし、波面のE部分は伝播してAに伝わり、屈折してDHJと伝わる。この波面の連続性は後で延べるが、物理的エビデンス(証拠)は無く、仮定である。ホイヘンスからの導出の場合も波面は連続性があると仮定をしている。

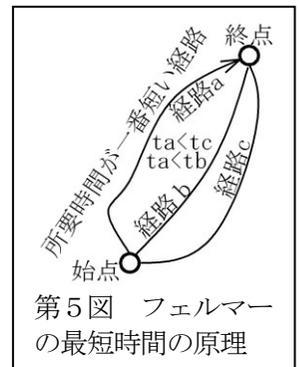
元々スネルの法則は光の屈折での現象である。昔は光の波動説があったが、今は電磁波の仲間で光子と考えられている。電磁波として、境界の電界と磁界の条件からスネルの法則は導けるが、光子としての特性から証明していない。光子は物質内で電子と相互作用し、その結果マクロに見た伝搬速度が落ちる。光の速度が真空中以外で落ちるのはこの相互作用による。物に色があるのもこの相互作用による。光と物質の相互作用から証明するのが正しい方法だろう。

◆フェルマーの法則とホイヘンスの法則

スネルの法則はフェルマーの法則から導ける。

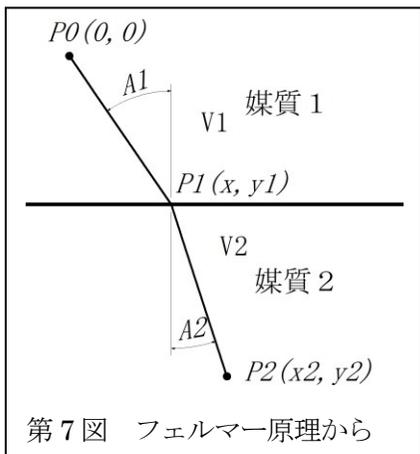
フェルマーの法則は元々「光は最短距離の経路を伝わる」であったが、現在では「光は最短時間の経路を伝わる」となり、フェルマーの法則は別名「最短時間の法則」と言われる。

2点を光、音などエネルギーが伝搬する時に、最短時間のルート自然是採用するのである。これは数学の二分法から導けるが、エネルギーのダイナミッ

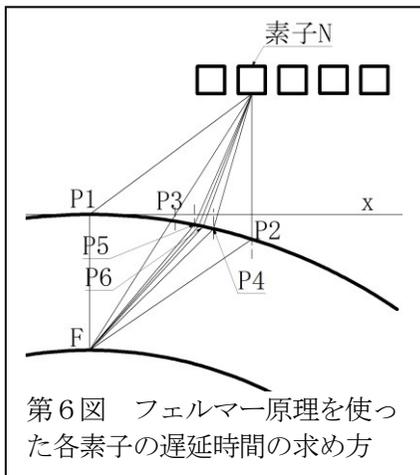


クス其自然物理がなぜ純粋数学から導けるか不思議である。筆者は偶々と合った程度と思っている。ある理論が他の理論から導けたと言って、

正しい導出とは限らない。理論が実験と一致したと言って、その理論が正しいとは言えない。多様な条件下でそうなるという事が多くの人に



第7図 フェルマー原理から



第6図 フェルマー原理を使った各素子の遅延時間の求め方

かかる。マイクロコンピュータは単純計算の繰り返しが得意だ。アレイの制御などで、各素子の遅延時間を求める場合、又はある点でフォーカスする場合は、このフェルマーの定理を使って計算する。数学で言う二分法的方法である。例えばパイプの内面にフォーカスする遅延時間を計算する場合、アレイの素子 N に対して適当な点 P1 を通過するとしてフォーカス点から素子までの伝播時間 T1 を計算する。次に、少し離れた点 P2 を通過するとして伝播時間 T2 を計算する。T1 < T2 なら P1 の左側に最小時間の通過点がある。T1 > T2 なら P1 の右に最小時間の通過点がある。T1 > T2 だったら、中間点の P3

によって確認されて、初めて「多分正しいであろう」となる。

マイクロコンピュータは足算引算回路がハードとして組み込まれている。掛算も最近では組み込まれている。三角関数はまだ組み込まれていない。三角関数をソフト処理すると時間が

の伝播時間 T3 を計算し、更に中間点 P4 を計算比較し、より短い時間の位置を割り出す。これを 8 回から 10 回繰り返すと、十分な精度になる。この手法は AD コンバータで低電力と速度を両立した、随時比較型 AD コンバータと同じである。この手法の利点は平面や円だけでなく、自由な面に適応できる事だ。演算で自由な曲面に対する各素子の遅延時間の計算は大変であるが、この手法では例えば光学的に測定した形状数値データから簡単に各アレイ素子の適切な遅延時間を求められる。

さて、フェルマーの原理からスネルの法則からも導出しよう。第7図で第一媒質の P0 から音が界面の P1 を通って第二媒質の P2 に伝わったとする。伝播時間 T は

$$T = \frac{\sqrt{x^2+y1^2}}{v1} + \frac{\sqrt{(x2-x)^2+(y1-y2)^2}}{v2} \quad \text{式(5)}$$

この値が最小になるのは dT/dx が最小の点なので、所謂ニュートン法で最小の T となる x を求める。

$$\frac{dT}{dx} = \frac{x}{v1\sqrt{x^2+y1^2}} + \frac{x-x2}{v2\sqrt{(x2-x)^2+(y1-y2)^2}} = 0 \quad \text{式(6)}$$

分母は P0-P1 と P1-P2 間斜線長さなのでサイン関数で表示すると

$$\frac{\sin A1}{v1} - \frac{\sin A2}{v2} = 0 \quad \therefore \frac{\sin A1}{v1} = \frac{\sin A2}{v2} \quad \text{式(7)}$$

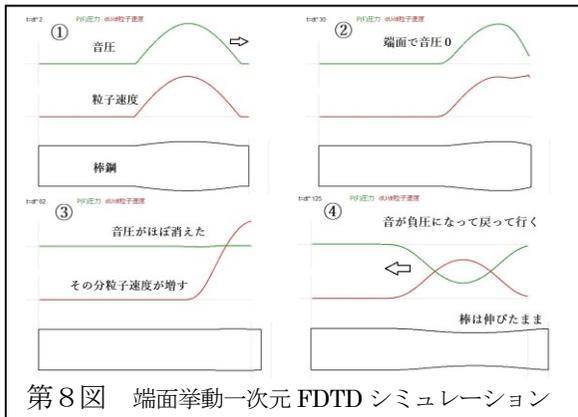
と導かれる。

フェルマーの原理を信じれば、一見良さそうに思えるが、音が P0-P1-P2 と伝播すると前項同様に波面の連続を暗黙に仮定しているが、そのエビデンス (根拠) は無い。音に対してフェルマーの原理を適応して良いと言うエビデンスもない。

◆材料端面での音の挙動

材料境界ではなく、解放端面に音が達するとどうなるかを考えてみよう。コーナー反射など非破壊では良く使う現象だが、詳しくは書物に記載されていない。鋼板の厚さを測定する時、裏面からの反射エコーを使う。反射すると音は位相が反転して戻ってくることは知っているが、その反射の瞬間は音はどうなっているのだろうか？第35回で話したフリーの一次元 FDTD シミュレーションをしてみよう。 <http://www.isl.co.jp/download/FDTDSetup1.zip>

第8図①の様棒鋼を右端面に向かって半波の正の音が伝播する状況を模擬する。棒鋼をハンマーで叩いた場合の模擬である。各図上は音圧、中は粒子速度、下は棒鋼の誇張イメージ図である。②で音が端面に当たる。端の外に何も無いので圧力が当然0になる。その音圧エネルギーが減った分、運動エネルギー=粒子速度に



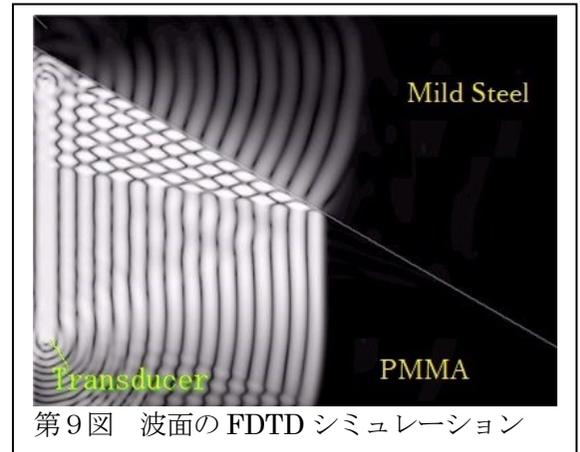
なり、粒子速度は端面で上がる。③では音圧がほぼゼロになり、粒子速度だけが有る。我々が観測している一般的な音は「音圧」の意味で、音圧は開放端面でゼロになるのである。開放端面では音圧の連続性はないと言う事だ。開放端面では無い媒質境界の場合、音響インピーダンスの差に応じて音圧の一部は粒子運動に変化すると考えられる。従って境界でも音圧の連続性はないと考えられる。④で音は音圧が負に成って戻って行く。粒子運動の方向はそのまま右向きである。

開放端で音圧がゼロに成るが、音の定義を音圧と運動が変換して伝わっている物とすると、端部で一旦音では無くなるという事に成る。粒子運動のみでも音とすると、単に車が走っている状態(車の各粒子が一定の粒子速度を持っている)も音になるので、この定義は使えない。

鋼材の端面に探触子をあてて、音が観測されるのは、探触子がくっ付いた為、開放端でなくなったことに依るので勘違いしない様に。

◆音の連続性 二次元シミュレーション

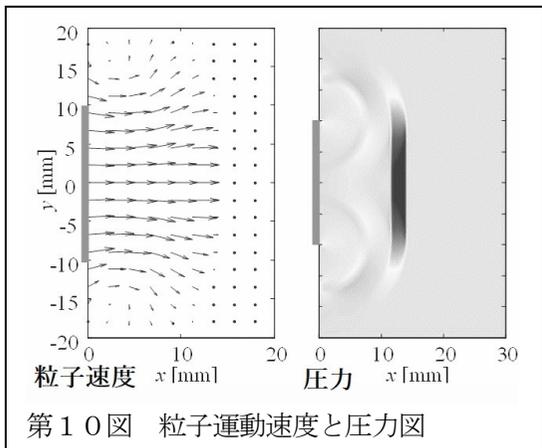
境界面に関する多くの理論式は、音波又は波面が連続であることを仮定して導出される。ニュートン力学とフックの法則を使った二次元 FDTD シミュレーション・ソフトでアクリルと鋼の境界面での波面の状態を観察しよう。結果を第9図に示す。表示は変位に比例した輝度と



している。音圧で表示すると、音速が早い鋼材内は、暗くて波面が見えないので、変位表示が FDTD の基本である。固体から気体への伝搬も容易に観測される。鉄の表面が振動したら、その外の空気も同じ変位をしているので、音の伝播が判断しやすい。実際の音圧は音響インピーダンスの比相当変化する。第9図を見て分かる様に波面は連続ではない。境界面でニュートンの作用反作用の法則が成り立つ筈で、波面を構成する圧力は力(応力)だが、ニュートン力学では粒子を加速減速するのも力である。粒子が運動を持っていれば、それは圧力に変わる事が出来る。圧力の観測方法がいくつかあるが、粒子の運動は観測できない。FDTD シミュレーションの一枚の画像から音圧と、運動を知る事が出来ない。一枚の画像の空間微分(輝度の変化)が音圧に比例し、ごく僅かに時刻が異なる二枚の画像の差(時間微分)が運動に相当する。2枚の画像の各点での変化を調べる必要がある。この簡単には見えない力を含め、作用反作用の法則が成り立っていると考えられる。

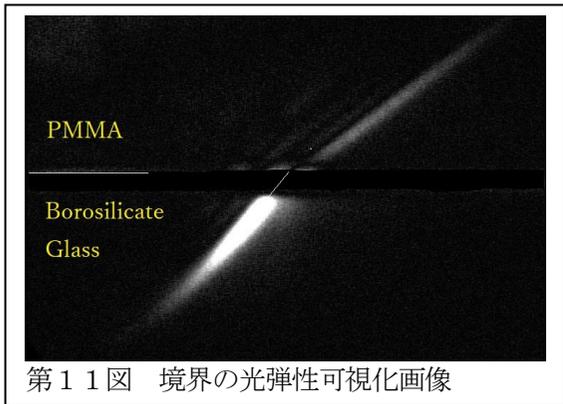
余り良い例ではないが、気象図に気圧図と風向図があるのと同じ様な事と考えればよい。参考までに第10図に振動子から音が出た直後の

FDTD 計算結果のデータを元に粒子運動速度と圧力を計算した結果例を示す。人の頭の中で圧力と粒子運動を同時に考えるのは非常に困難だ。粒子運動は方向を持った速さ=速度(ベクトル)で、向きと大きさを矢印で示す。



◆音の連続性 光弾性可視化

シミュレーションではなく、実際の境界での波面を見たい。アクリルとガラスの境界での状況を超音波光弾性可視化法で試した。光弾性可視化法の原理は以前連載で延べたのでここでは書かない。アクリルとガラスの偏光状況が異なり、通常的全圧力を計測する方法では難しいので、入射波と屈折波の間に直線偏光板を合わせて両方が良く観測できる状態にした。その為、第9図に現れている反射波やモード変換波は観測されない。何とか観測できた画像を第11図に示す。ガラス試験片は手を怪我しない様に端



面を 0.5 mm 程度 C カットしてあり、その部分は黒くなっているので、アクリルとガラス境界を示す横線を図左に加筆した。また屈折したビームの境界側も見えないので、加筆した。

この画像からの、入射波と屈折波の連続性が無いと判る。探触子を変えたり、励振をバーストなどにしてみても、屈折波と反射波は常に入射波に遅れている様に見える。

なお、使用した探触子は 1MHz15x50 mm 広帯域で入射角は左上からの 40 度である。

◆あとがき

スネルの法則は物理的根拠のない概算に使う近似式と判った。次回は波面の連続性を仮定しない屈折の法則導出や、最初の疑問に対する話の続きをする。

◆今回知った事

- (1) 界面への音の入射で、臨界反射を考えると、界面片側が振動しているのに、反対側が振動しないとなる。そんな馬鹿な事が有るのか？
- (2) 屈折角が 90 度に近いとビーム幅がゼロに近づく。ほぼビーム幅 0 という事はありうるか？
- (3) 色々な理論式は、無限や無限小の値を取りえるが、そこに近い部分では誤差が大きかったり、使えない事が多い。
- (4) 市販斜角探触子の入射角は標準試験片に合わせてこんで作っていて、スネルの法則を使っていない。
- (5) 実効屈折角 80 度以上の探触子は売られていない。
- (6) 屈折角 90 度と言う探触子を調べたら A1 試験片で 75 度だった。
- (7) フェルマーの最短時間の原理からスネルの法則は導ける。
- (8) スネルの法則の導出に色々な方法があるが、どれも理論的に無理が有る。
- (9) 開放端に音が伝わると反射時点で一瞬音圧がゼロになり、音圧は無くなる=音でない。

音のスネルの法則,音の屈折の法則,フェルマーの最短時間,ニュートン法,アレイの遅延時間計算

- (10) 開放端を考えると音と運動の区別がつかなくなる。
- (11) 二次元 FDTD シミュレーションでも音圧波波面の不連続性が確認できる。
- (12) 光弾性可視化でも音圧波波面の不連続性が確認できる。

<参考文献>

超音波技術入門—発信から受信まで(2015/04初版2刷、日刊工業新聞社)

Y.Udagawa and A.Yamada, "Simulation and Verification Experiment of Radiation Sound Pressure Waveform from Finite Aperture Piezoelectric Transducer", The 34th Symp. Ultrason. Elect. (2013).

USE2013 Analysis and Observation of Sound Wave Field from Finite Aperture Piezoelectric Transducer - Fact-finding of Misfit between Conventional Analysis and Experiment Observation ·