

音波のよもやま話 (その35) (音) の FDTD シミュレーション

(補)アイ・エス・エル 宇田川義夫

◆はじめに

今回は音波シミュレーションとして売られている音の FDTD シミュレーションの話をする。

◆自然界の「時間の矢」と FDTD

物理学が扱う自然界は過去には戻れない「時間の矢」に支配されている。一方数学は時間の矢を考慮していないものが大半で、使い方を間違えるととんでもない事が起きる。フーリエ級数などで、波数空間に変換すると時間の矢に支配されない為、処理後に実空間に戻すと、物理現象としてはありえない事が起きる。一方ラプラス変換、ミクシンスキーの演算子法は時間の矢が考慮されていて、過度現象の解析に多用されている。

多くの数学では逆の演算が可能だ。積分したものは微分すれば元に戻る。微分したものは、積分すると、積分常数を与える必要があるが、変化する部分に関して大まか元に戻る。自然界では、今の状況から過去を正確に知る事は出来ない。

FDTD(Finite Difference Time Domain)は時間領域差分法と訳されるが、実時間で、時刻に沿っての計算で、関係式が判れば、実時間の物理現象の殆どをシミュレーションできる。筆者の著書やこの連載での多くの図は FDTD や単に実時間計算で作っている。

パソコンで繰り返し演算する場合、必然的に時系列で計算するので、意識しなくとも時間の矢を組み込む事が出来る。1980年代のパソコン黎明期から電気回路の過度現象の解析に実質的に FDTD を使っていた。

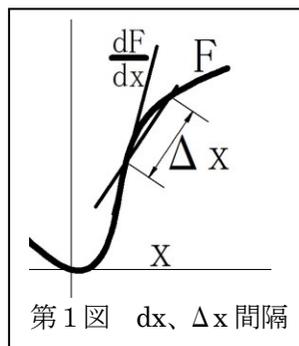
筆者は音の FDTD に関しては、パソコンの速度が上がった 1990年代に販売目的で試作した。米国製の FDTD 法によるシミュレーション・ソ

フトの方が処理速度は 10 倍速く、試作を中断し、米国製を売ることにした。1980年代にドイツの 2 人の機械科の学生が当時の遅いパソコンで高速計算処理する歪伝搬の計算方法を編み出し、その方法を米国の音波 FDTD 製品は使っていたと後で知った。歪の伝播は即ち音である。市販 FDTD ソフトの大半は歪を計算している。生の出力データは歪データである場合が多く、歪の時間微分が粒子速度、空間微分が音圧に相当する。音圧は 1 枚の歪み図から求められ、歪を輝度で表す輝度図であれば、輝度の変化が音圧に相当する。が、粒子速度は 2 枚の時刻が隣り合う図の差から求めるが、2 枚の図の差は人には認識できない。音は原理的には非線形で、気体中の大きな圧力では FDTD の計算結果は正しくないと考えられる。が、建築の鋼製梁の設計などで歪を計算する、「重ね合わせの理」が成り立つ事が確認されていて(フックの法則が成り立つ範囲)、鋼の超音波探傷程度の圧力であれば、FDTD 計算内の加算処理は精度の良い結果を生む。

◆計算時間ピッチ、空間ピッチ

ニュートンが微分を使い始めた一人と言われるが、ニュートン力学に限らず、殆どの物理現象は微分式で表現される。

数学上、微分は第 1 図で間隔 Δx が無限小に近づいた時の図中の傾斜に相当する。物理学上無限小は存在せず、扱う対象で異なるが、粒界、原子、素粒子と言ったサイズで、



一定の大きさを持っている。無限小までする必要がなく、 Δx を無限小に近づける必要がない。十分小さな Δx のピッチで考えれば良い。図でも Δx を $1/4$ にすればほぼ dF/dx とほぼ重なる。

鏡面仕上げと言うが、人の目に鏡面に見える事を言う。人は約 $400\sim 800\text{nm}$ の波長の光を感じ、この $1/4$ 波長以下になると、平らに見える。鏡面仕上げは $400\text{nm}/4=100\text{nm}$ 以下の「凸凹のある面」である。可視光より波長の短い紫外線領域をも見ている鳥、トカゲ、昆虫等にとって、人にとっての鏡は、鏡とは限らない。鏡面だから凸凹が無いのではなく、凸凹が見えないだけである。

音波をシミュレーションする場合も波長の $1/4$ より小さな空間ピッチや時間相当ピッチで計算すると、 $1/100$ のピッチで計算したのとはほぼ同じ結果になる。

なお、自然界でも時間の最小値があると考えられていて、プランク時間と呼ばれており、約 $5 \times 10^{-44}\text{s}$ で、これ以下の時間単位で意味のある計測は出来ない。

◆音(歪)の伝播を支配する関係式

音など機械的現象は全てニュートン力学に従う。今回一次元の歪 FDTD シミュレーション(以降歪 FDTD)では第二法則とフックの法則を使う。音の波動方程式の導き方も両方を使っている。復習すると、ニュートンの第二法則、運動方程式は以下である。

$$a = \frac{v}{dt} = \frac{x}{dt^2} = \frac{u}{dt^2} = \frac{F}{m} \quad \text{式(1)}$$

ここに a は質点の加速度、 v はその速度、 x はその位置、 u は変位、 m はその質量、 F は質点に加わる力である。

フックの法則によると力 F は位置 x に比例する。前回述べたように、これも近似式で、特に固体は式が成り立つのは狭い距離範囲である。比例係数 k はヤング率と呼ばれる。

$$F \approx -kx = -ku \quad \text{式(2)}$$

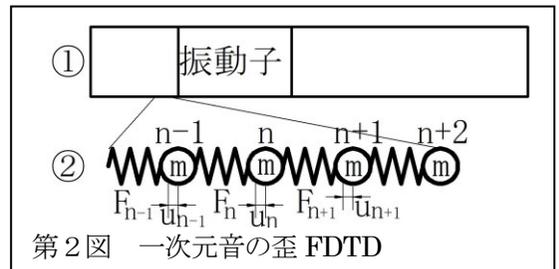
一次元以外は力 F の代わりに圧力 P を使う。粘性の無い気体液体では P は等方であるが、固体等ではポアソン現象の影響を受ける。なお、BED(後述)が発生し、音が広がる理由は、圧力 P に方向が無い事によるとも言える。圧力は後ろにも、前にも、右にも、左にも物質を移動させようとする。

二次元三次元では、上記に式をベクトルにすればよい。固体内では垂直圧力とせん断力に分けて考える為、固体力学ではベクトルの代わりにテンソルが使われる。

式(1)はこれに反する現象は、光速に近い場合を除けば確認されていない。また、式(2)の妥当と言える。従って、計算結果も正しいと考えられる。歪 u を変数としているので、歪 FDTD シミュレーションと言う事にする。音の FDTD シミュレーションには他の変数を使う方法も提案されていて、カタログ等に明記されておらず、市販ソフトのどれがどの式に基づいているかハッキリしない。

◆音の一次元歪 FDTD シミュレーション法

二次元、三次元の音のシミュレーションは専門書が沢山あるので其方に任せて、エッセンスを知るため、一次元の音の伝播に関して説明する。一次元の利点としては、後で説明するが、音圧や粒子速度の伝播の様子が理解しやすい事である。課題を単純化する為、振動子に振動子と同じ音響インピーダンス、音速の材料が前後に張り付いた状態で、振動子から出る音をシミュレーションする。計算は Δt ステップで行うとする。



第2図①の様に振動子が中央にある棒の一部を拡大②して、質点 m がバネで繋がった状態を考える。質点に番号を振り n 番目を考える。質点 n の変位(定常位置からの差)を u とする。 u の時間微分が所謂「粒子速度」である。変位に成れない人は各点の位置 x を使っても良い。

n 番目の質点の左右の力 F_n と F_{n+1} の差で質点 n が Δt 時間加速される。 Δt 後の速度はニュートンの第二法則から

$$\text{次の } \frac{u_n}{dt} = \text{今の } \left(\frac{u_n}{dt} + \Delta t(F_{n+1} - F_n) \right) \quad \text{式(3)}$$

となる。全ての n に対して、この計算をする。

続いて、質点間の速度差で、力が変わるのでフックの法則からバネ係数を k として

$$\text{次の } F_n \approx \text{今の } (F_n + k \Delta t (\frac{u_n}{dt} - \frac{u_{n-1}}{dt})) \quad \text{式(4)}$$

となり、この計算を全ての質点 n に対して行う。 n の最大が 100 なら、上記の計算が 100 回 $\times 2$ で現在のパソコンならデータ保存作業等も含め 10m 秒もかからないであろう。

話を元に戻すが、棒の両側に関しては、境界条件により異なるが、剛体で押さえられているなら、境界 (固定端) は変位しないので、固定端の u 又は $\frac{u}{dt}$ をゼロとし、境界の外に何も無い自由端なら端の F をゼロにする。

音は音圧 (上の説明では力) を粒子の運動を変換しながら伝わっていくが、それを Δt 時間毎に、ただ単に繰り返し計算するのである。実際の現象を小さな時間に区切り、実現象を追いかけるのである。

物理的に起きている現象をそのまま Δt ごとに計算するので、TD(時間領域)手法の名が付いた。原子分子や流体をシミュレーションする粒子法は同じ時間領域法で、違いは空間をメッシュで切るか切らないかである。第2図では n 番目として空間を区切った。一方粒子法は粒子自体に番号を付け、空間を区切らない。

なお、 $\frac{u_n}{dt}$ と F のループ計算なので、一種のループ・ゲインが 1 を超えると発散する。自然界ではエネルギー保存則からありえないが、計算では境界条件、計算ピッチ、計算誤差やアルゴリズムにより発散する。周波数帯域を制限したりして、発散を避ける細工をした FDTD ソフトも見受けられるが、細工によっては正しいシミュレーションから逸脱する事もあり、注意が必要だ。式(3)(4)が微分式であるため分母が微小で僅かな差で大きな変化を及ぼす。細工はしないで発散しない様な初期条件、境界条件を探して計算する方が無難である。

なお、式(3)(4)で F を使っていて、 F の時間積分は運動量、 F の空間積分がエネルギーなので、大気圧より十分低い時と言う前提ながら、慣性量保存則と運動エネルギー保存則がなりたつ。数学の綾である。二次元や三次元に拡張した場合、保存則が如何なるか筆者は知らない。少なくとも二次元三次元では増えた軸のメッシュからの束縛を受ける為、一次元では可能な慣性運動の模擬ができない。

◆計算の高速化

二次元三次元になると質点の二乗三乗と多くなり、計算時間がかかる。1980年代のドイツの学生は画面の1ピクセルを質点1個に対応させた。当時はCPU側で画像処理もしたので、例えば超音波探傷器でCスコープを描かせる場合も、同様の手法を用い高速化した。今はCPUチップ内にGPUが有り処理してくれるが、今でも表示の高速化には有効な手段である。

n 個の質点に関して式(3)と(4)相当が同時に発生するが、PCは同時計算できないし、順序計算する。最近のPCは数個のプロセッサ・コアを持っているが、コア間の情報のやり取りは苦手で、複数の別の事務ソフトを同時に走らせるためである。多量の同時計算にはGPUが適している。GPUはCPUに比べ命令種類が限られ、複雑な処理は出来ないが、コア間のデータ転送が早い。

画像処理用のGPUは、画面の各ピクセル間の高速計算させる為、百~数千のプロセッサ(コアと呼ぶ)を1つのICにしたもので、並列計算に特化している。スーパー・コンピュータ「京」なども同じ様な構造で、最新の米国「サミット」では240万個のコアを使っている。クロックは我々が使うPCより遅く、単純な事務ソフトを動かすと、PCより鈍い。一方FDTDの様に多数の質点の計算する場合、並列処理するソフトを作ってGPUで走らせると高速演算ができる。計算自体は早くなるが、データを残したり、画面へデータを送ったりの処理は通常のPCとさほど差が無いので、使う目的とコストによりGPUが良いかCPUが良いか選択される。

GPUは市場の大きな画像(Graphic)を対象にしている。市場が小さくてもCPメリットがあれば、専用ICを作る事がある。筆者らは1970年代自動超音波用に専用プロセッサICを開発した。インテルのCPUと同じクロック周波数で3倍の処理速度を達成できた。最近AIをGPUで行う事がブームに成っているが、AI専用のプロセッサ・コアやアクセラータ(CPUと組み合わせる事で速度を上げるチップ)も発売され始めている。GPUはFDTD法に適した構造ではない。歪や応力の伝播は、音自体である。また電波は電界と磁界のエネルギーが相互変換しながら伝

わるとして計算でき、FDTD法での解析も行われている。共に2つのパラメータを変換しながら伝播するので、同じ構造のプロセッサ・コアで高速化が可能である。市場は広いと思われ、専用チップの開発もありえよう。

なお、インターネットを使って世界中の何億台ものPCをリンクさせ、多量の計算を高速処理する方法もある。殆どのPCはその能力の1/100程度も使っていないので、空き時間を無償で使わせてもらう方法である。

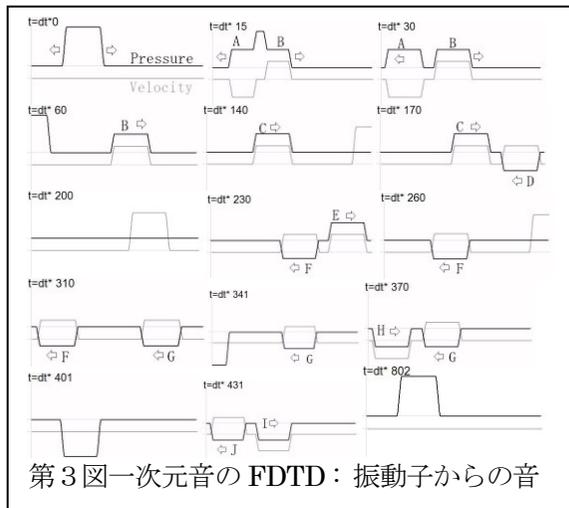
◆一次元歪 FDTD の有用性

直感的には一次元より二次元、二次元より三次元のFDTDが良からうと思う。筆者もそうであった。音は粒子速度と圧力が相互変換して伝わる現象で、二次元、三次元では、この二つを同時に分かり易く図に表すことが難しい。粒子速度相当を表現するのに、気象で使われる風の強さと方向を示すベクトル図があるが、これも大まかな部分は表現できるが細部が良く分からないし、音圧との関係が分からない。音圧は方向が無く、輝度で音圧を表現しても、どちらに進む音かがわからない。同じ図の中に、輝度で圧力、矢印で粒子速度と表してみたが、互いに相互変換する様子が良くわからない。例えば、単純に鋼の表面(空気との境界)に音が伝わると、表層では、音圧はゼロに、粒子速度は2倍になるが、その現象を図では表現できない。ある時、一次元のFDTDなら、音圧と粒子速度の図を上下に並べ、人に分かり易く表現できることに気が付いた。同時に二次元三次元と異なり、メッシュによる束縛が無いので、物の運動も表現できる事が分かった。

◆振動子一次元歪 FDTD シミュレーション例

第3図に前第2図を式(3)(4)でプログラムにしたソフトの計算結果例を示す。音響インピーダンスが音材材料で作られたランジュバン型振動子の片側を強く固定して、パルス駆動した場合に相当する。全体の区間数は $n=201$ とした。濃い線が圧力、薄い線が粒子速度である。分かりやすい様に同じ振幅になる様に正規化したので、圧力と粒子速度の線はそれぞれのエネルギーと見ても良い。表示ベースラインは上下に少しずらした。近似であり、前回の説明の様に大

気圧下の弱い音を模擬である。「負号の付いた」ポテンシャルと運動のエネルギーと思っても良からう。プログラム自体は単に式(3)(4)を繰り返して計算する至って簡単で、ソフト制作に慣れた人なら1時間もかからないで作れる。表計算エクセルのVBAで作っても高速で計算されるの



第3図一次元音のFDTD：振動子からの音

で、問題ない。市販ソフトを使う前に自作すると、FDTDアルゴリズムの欠点や限界が見えてくるので自作したい。

第2図の振動子を市販スパイク・パルサーで励振すると、瞬時と言っても数十ns程度かかるが、一定の端子電圧になる。振動子の内部圧力が端子電圧に比例し上がる。振動子内の光(電波)の速度で圧力は上るので、ほぼ電圧の立ち上がり時間に追従して瞬間振動子幅内が電圧に比例した均一圧力となる。この初期条件を台形で表現した。本来は印加電圧の立上りは、駆動回路主にMOSFETの加速度曲線の様になり、充電時間が有限で、瞬時では無い。瞬時は物理的にもありえない。立ち上がりは曲線であろうが、単純化して傾斜とし、台形の上面幅が振動子幅となる。この初期状態は、電氣的立上り時間経過した後で、時刻ゼロで与える音圧は第3図左上 $t=dt*0$ となる。計算時は dt 毎に行う。なお、台形は見た目には分らないが、四隅は少し丸めた。急な屈曲点は、大きなエネルギーが必要なので、物理的にありえず、計算させると振動等を起こす。

$t=dt*30$ は、時刻ゼロから30回計算を繰り返した状態で、前後に音圧が半分の部分が出てきて、同時に正負の粒子速度が表れる。中央は静

圧のまま、音ではない。正規化してあるので、圧と粒子速度が同じ場合に音となる。

初期の音圧の左半分が、左に進む音を作り、右半分が右に進む音を作っている。連載の「重ね合わせの理」で説明した通りである。

音圧と粒子速度の値が同符号の場合、音は右に移動し、異なる場合は左に移動する。図だけからは何処に動いているのか、イメージがつかみにくいなら、ウェブにあるフリー・ソフトでアニメーションを見た方が良い (<http://www.i-sl.co.jp/downj.html> よりダウンロード)。また、振動子発生する音と受信時エコー波形がどうなるかも計算している。第3図の様な台形では無く、市販探傷器等のエコー波形に近い波形を計算できる。受信波形に関して、もっと正確にはシミュレーション・ソフト P2R のフリー版も UP されている。保護膜やバックキングの影響も計算できる。P2R の振動子音圧波形データを一次元 FDTD に入力してより実際に近い現象を模擬できる。

60 回計算すると $t=dt*60$ で図の様に音圧が綺麗に左右に分かれる。元々の粒子速度を持たない静圧の左右の半分ずつが、音即ち、音圧と粒子速度を同時に同量持つものに変わる様子が判る。

左に進んだ音は剛体の壁に当たり、圧が2倍に、粒子速度はゼロになる様子も 150 回で確認できる。剛体は動けないので、粒子速度が無くなって、運動エネルギーが無くなった代わりに、圧力が増えたのである。この状態は粒子速度が無く、動いていないので、「音」では無い。単なる「圧」である。この音の固定端反射は、一般的に「固定端で音圧は2倍になる」と書かれているが、この状態では音では無いので、正確には「固定端で音は元の音圧の2倍の圧力になる」である。

210 回目で左端の単なる「圧力」が、再び「音」になって、右に移動するのが判る。60 回で右へ移動していた音は右の自（解放）由端に当たり始める。

250 回では右に当たった音の圧力はゼロになり、粒子速度のみになる。音の自由端反射である。粒子速度は2倍である。音圧のエネルギーが無くなった代わりに粒子速度のエネルギーが増えエネルギー保存則を満たすのである。

少し経って 300 回では右の自由端の粒子速度が負音圧となり、330 回で左に伝搬する様子が判る。

400 回では、330 回観測された右に進む正圧と左に進む負圧が、重なって音圧がゼロになり、粒子速度がその分増えることが判る。正と負の音の重ね合わせである。粒子速度のみが存在する。

480 回では、それぞれが一見通り抜けたかのように見えるが、400 回での粒子速度の右半分と左半分が新たに音を作っている。一般にこの現象を音圧だけで見て、「音の独立性」と呼んでいるが、400 回の粒子速度の左半分が左に進む音を作り、右半分が右に進む音を作る。粒子速度の左半分は元々左から来たものであり、単に反射しているのである。「音の独立性」は無い。連載の「重ね合わせの理」で説明した通りである。

一次元でも音の伝播現象はかなり複雑で二次元、三次元では、どの様に干渉し伝播するか説明は困難であることが判る。

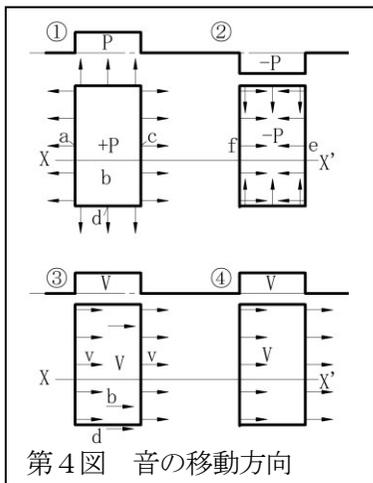
なお、例えば平行面の共振では、両面を音が行き交うと考えるが、実際は音が中央で反射している。片端から叩いた場合のみ、往復し、中央に音源が有るある場合、1/2 を往復している。右 1/3 に音源が有ると、右 1/3 と 2/3 の所で反射を繰り返す。これも書物には正確に書かれていない。大半は全体を往復していると考えても結果が合うだけで、物理的には間違った説明である。円形振動子の径振動波、以前の連載で書いたが、周囲と中央間で往復反射する為、中央で高い静圧になって、ポアソン比相当の強い縦波を振動子中央から発する。これも直径を音が往復していると書物に書かれている場合が多い。

第3図 1600 回目で初期状態と同じとなり、幅点数 200 の倍、400 の4倍で、 $\lambda/4$ 共振法の状態と言える。

一回目の計算で音圧が粒子速度になり、次の計算で粒子速度が音圧になる。その為、 Δt の計算に2回計算が必要で、2回計算で1区間進む。FDTD のこのアルゴリズムを一般に「蛙飛び計算」と呼んでいる。FDTD の専門書では n を $1/2$ 単位に $0, 1/2, 1, 1+1/2, 2, \dots$ として、粒子を整数値、バネを整数+ $1/2$ として、計算繰り返し数と位置と PC 内のメモリの番号の整合性を取っている。

◆音の進む方向

「音圧と粒子速度の値が同符号の場合、音は右に移動し、異なる場合は左に移動する。」と書いたが、如何してか考えよう。第4図2つの音を示す。①と③は正圧の音の音圧と粒子速度、②と④は負圧の音の音圧と粒子速度である。考えやすい様に範囲内は均一音圧と粒子速度とした。



第4図 音の移動方向

「圧力には方向が無く上下左右に伝わろうとする」。①では圧力+Pは境界をその外へ移動させようとする力が働くが、音aは既に粒子速度vを持っていて、aに対して圧力Pが減速させて、静止させる。点aは圧力が無くなるので、その外側には何も力が加わらない。内部の点bに対しては、あらゆる方向のPが釣り合っていて、粒子速度のみがある。従って、右に移動する。音の直ぐ外のcは圧力で外の粒子速度vまで加速させる。と言う事で音は右に進むことになる。d点では音の圧力は粒子を外に押す力が働き、その部分は左右方向の粒子速度vを持っているので、vで慣性運動しながら圧力で下側に力が加わる。図左右方向の運動が少し上下運動を得て、音速は一定なので円弧に広がっていく。端ではないと、音圧Pは一定なので、広がらない。より正確には音の伝搬方向に直角な方向に音圧変化が有ると、音は広がる。

この部分は一般に回折と呼ぶ人も多いが、回折は「物の裏側に回り込む」現象をいう。物があるから回り込むのではなく、「物によりビームの端が出来るので、回り込む」。筆者は音のビームの端が拡散回折するという物理現象の意味を明確にする為、BED(Beam Edge Diffusion and

Diffraction)と名付けている。なお、連載の初めの方で書いた様に、例えばd点から下に向かって外側BEDにより出来た事により、d点の内側には負の音圧が発生し、負圧の内側BEDが発生する。正の音圧の場合、粒子速度の方向に音が伝搬する事になる。

②は負の圧力の音の場合で、圧力は周囲を引き込もうとする。Eでは前述と逆に持っている粒子速度vを負圧-Pが減速する。一方fでは内部の粒子速度vまで直ぐ外の粒子を図の右側に加速させる。その結果負圧-Pは粒子速度と逆に移動する。図の上下の面に対しては正圧同様に負圧の円弧の外BEDが発生する。

回折即ちBEDは音の伝播に直角な方向の音圧差により生じると言える。

第4図も眺めると、圧力Pを音が運んでいるとも言える。長い棒で物を押すとき、押す面で力に比例した音を発し、反対面で音が物を押す。この辺に関しては「物体と移動」で回に述べる。

◆砂場で遊び

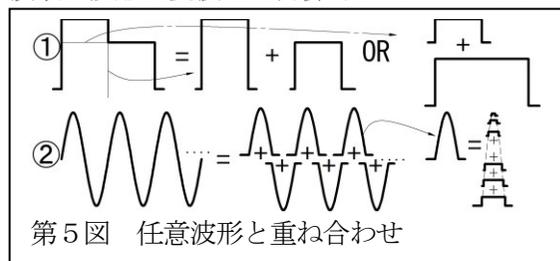
粒子速度と圧力の正負符号で移動の方向が変化するが、砂場で山谷を作って、砂の移動を粒子速度の方法、山谷を音圧に対応させると、現象が理解しやすい。

◆任意波形と重ね合わせ

矩形(台形)の初期音圧などの運動が理解できると、任意の波形は「重ね合わせの理」で第5図の様に考えられる。①の波形は水平に切っても垂直に切っても最終的な結果は同じとなる。

連続波は図の様に、矩形の重ね合わせで作ったサイン半波の更に重ね合わせでできる。

なお、FDTD法ではパルス波の様な過度現象は得意だが、Q値が非常に大きな(一般的に100以上)共振現象は計算誤差が大きく、計算時間も必要となる。時間の矢は無くなるが、周波数領域に波形を変換して計算やシミュレーション



第5図 任意波形と重ね合わせ

する方が精度は高い（一般にモーメント法と呼ぶ）。共振現象は同じ所を行きつ戻りつを繰り返すので、時間の矢に意味が無くなる。

◆FDTD のメッシュによる問題

二次元以上の FDTD は境界要素法の一つでメッシュを切ってセルを作る。歪はセルより十分小さい事が前提で、音響インピーダンスが小さなものは、変位量が大きく、セル寸法を超える場合もある。その場合実際との差異が発生する。周りのセルと接続されている為で、極端な例として、端部を固定した場合、端部では変位はゼロであるが、その前のセルは変位及び粒子速度が有る。実際の材料は境界で変位ゼロはありえない。こう言った無理の為 FDTD 計算で発散などが起きるので注意が必要だ。

◆FDTD の変数による問題

変位 u を変数とする式(1)(2)を使ったが、圧力やスカラー速度ポテンシャル、ベクトル速度ポテンシャル等を使う FEM 方法もある。解析的手法では、 u を変数にする事は困難なので一般に圧力や速度ポテンシャルが使われる。同様に FDTD に使うと式が簡素化され、計算時間の短くなる場合が多い。が、これらは何れも「音として伝搬する事を前提」にした変数や関数で、音が衝突して静的な状況等を計算できず、実際と乖離する。どう言う状態で実際と合うのか規定できないので、使うのは問題がある。

例えば、残留歪即ち音では無い状態を計算できないことがある。

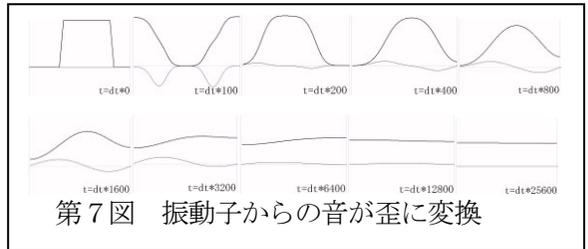


第6図①の様に振動子に電圧を加えると、振動子が膨らみ、棒の両異端が固定されている場合、振動子から出た音は、時間が経つと静的歪となる②。図では振動子幅は全体の半分とした。音響インピーダンスと音速は同じにしている。振動子が僅かに伸びた分他の部分は僅か短くなるが、実際の歪みは図の様には目視できない僅かな量である。減衰無で長時間計算すると計算誤差により段々振幅が減ったり発散したりするが、音は減衰せず材料を単に永久に往復する。勿論計算誤差が集積して多少変化する。

速度ポテンシャル等を使う方法では、残留応力は音で無いので、計算できない。式(3)(4)を使った FDTD でも、マクロな減衰定数を与えると、音のエネルギーを減らす事となり、結果音は無くなるが残留歪が残らない。多くの音の市販 FDTD シミュレーション・ソフトは減衰定数をマクロ定数として与えているので、定常歪が計算されない。

連載で「減衰」について述べたが、減衰の本当の原因である音速分散を取り入れるとある程度解決できる。この場合、計算誤差を除けば、全エネルギーは変化しない。実際の棒では壁や大気中に逃げる分もあるが、大半は静的歪エネルギーとして内部に残る。運動エネルギーがなくなり、殆どが圧力のエネルギーに変わる。気体の場合、圧力=熱であり、熱に変わったとも言える。シリンジでピストンを押す実験をすると、ピストンからの運動エネルギー（音）が平行状態（熱）になるのに数 ms かかる事は知られていて、大きな計算回数から時間がかかる事は想像できる。なお、二次元三次元ではセル毎に違う機械特性を付与すると減衰をシミュレーションできるが、セルの数が膨大となり現実的計算時間とならないし、どの様に付与すべきかの実際の粒界分布、形状や音響パラメータの計測が出来ない。

第6図を一次元シミュレーションした結果を第7図に示す。濃い線が音圧、薄い線が粒子速度相当である。



400 回繰り返し計算すると、波形が訛ってくる。低い周波数の探触子から出る音を、別の高い周波数の探触子で観測すると、矩形波であることが判る。が、少し伝播すると丸みを帯びる。振動子から矩形音波が出て直ぐにサイン波半波に成ることが確認でき、これが、受信探触子と探傷器を通過すると 1 ~ 1.5 波のエコーとして表示される。

1600 回も繰り返すと明らかに粒子速度成分が減り、音圧がゼロになる事は無くなる。

3200 回付近では全体幅で音圧が右上がりとし左上がりを繰り返しながら、音が段々振幅を減らしていく様子が判る。所謂共振状態である。ランジュバン型の様な一部に振動子が有る振動体のパルス駆動では、駆動後直ぐに共振周波数成分は主にならず、時間がかかる事が判る。

12800 回程度になると、圧力はほぼ一定になり、粒子速度はゼロに近づき、音が殆ど存在し無いことが判る。

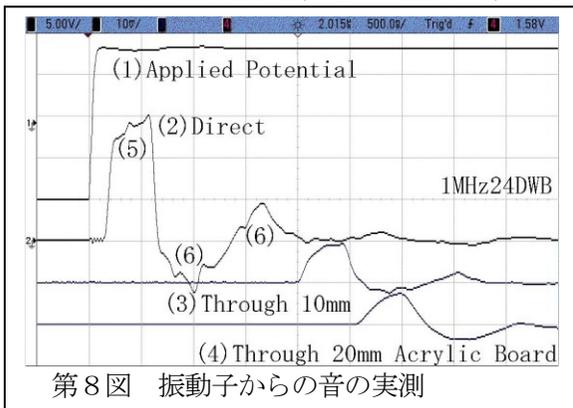
このシミュレーションの結果から、音の減衰は音速分散によるらしいとも言える。

尚、マクロ減衰を粒子速度だけに作用させる様なアルゴリズムの場合、音圧は残る。

第6図の場合も徐々に波形は分散して、定常状態になる前は、全体長さの共振が主になる。

また、ニュートンの第二法則とフックの式を使うと、静的な部分も計算されると言える。

第8図は 1MHz ϕ 24 広帯域市販探触子を観測した例で、ステップ状の電圧ファンクションジェネレータで加えると、電圧立上(1)で、矩形



の音が発生(2)する。通常の探傷器やパルサーでもほぼ同じ波形が観測される。(5)の傾斜は振動子と保護膜の張り合わせの影響である。小さな凸は $\lambda/4$ のセラミック保護膜の多重で、(6)にも表れている。(6)の減衰振動は保護膜、バッキング材の張り合わせや音響インピーダンスの違いで発生する。(3)は 10 mm、(4)は 20 mmの亚克力通過後の音圧波形で、矩形波形が段々滑らかになる事が判る(時間軸はずらしてある)。第7図同様の音速の拡散が起きていると考えられる。なお(2)は(3)(4)の倍の振幅が有るが、直接保護膜に接触した為である。0.1 mm厚さの亚克力

を通すとその影響で、保護膜の多重が観測されなくなる。

2MHz 以下の斜角の遅延材は亚克力が多く、この減衰で残留エコーを消して SN を上げている。5MHz 以上では、亚克力では減衰が多すぎ感度が下がるので、ポリスチレン系など減衰の少ない材料が使われる。

広帯域探触子は通常の探傷器のスパイク励振では厚さが厚くなるだけで、1 回励振する度に、探触子近くに静的残留応力が発生する。PRF の間で振動子はゆっくり元の厚さに戻り。媒質も振動子を押すが、振動子が先に戻るか、媒質が振動子を押すかは、媒質の性質とスパイク波形のデデュレーション次第である。

この一次元歪 FDTD では、前式で n 番目の力や粒子速度を考える場合、隣の力や粒子速度の影響を考えた。どの程度影響を加えるかは、実際の物体のミクロの物性の測定が困難なので、確定できない。実際の探触子の波形を計測し、それに近い状態になる様に影響度を設定するしかない。結局理想の模擬は出来ないが、傾向は確認できる。実際の材料は例えば圧延鋼の様に異方性で、粒界や音速が方向で異なる。コンクリートでは砂利や砂と言った異なる粒径と物性が存在する。これらを模擬する事は至難の技である。工業製品で同じ加工機、工程を通過した、粒界の異なる材料は、比較的粒子サイズと減衰特性に強い相関があるので、条件付きで模擬が可能であろう。

◆FDTD の三体問題

音の伝播中に原子 1 個が 2 個の原子を押すこともある。1 個の粒子/粒界が 2 個の粒子/粒界を押すこともある。3 つの異なる質量の物体が相互作用する場合、ニュートン力学だけでは解が求まらない。一般に三体問題と呼ばれる。メッシュ分割によりセルが並んだ状態で、正しい力の伝播が行われているか証明できていない。

二次元や三次元では FDTD シミュレーションはエネルギー保存則の計算は考慮されているか疑問である。自動的にエネルギー保存則が反映されるだろうと期待しているだけである。歪 FDTD の結果からエネルギー保存則を議論するには無理がある。

◆FDTD シミュレーションの現実との整合

机上での問題点指摘はそれなりに勉強にはなるが、現実とどの程度合うか一番の問題で、それを確認する必要がある。

「音場」の測定方法は存在しない。

辛うじて「音圧場」を精度は悪いが水中など液体中で、各種マイクロホンを使って測定している。マイクロホンを場に挿入する事自体が場を荒らす、どの程度荒らしているかの推定はできない。マイクロホンのタイプを変えると異なる結果が出るので、どれが本当に近いかもわからない。後の連載で、逆に音場がどの程度マイクロホンで荒らされるか歪 FDTD で見る。ここでは可なり荒らされると言う事だけを指摘しておく。

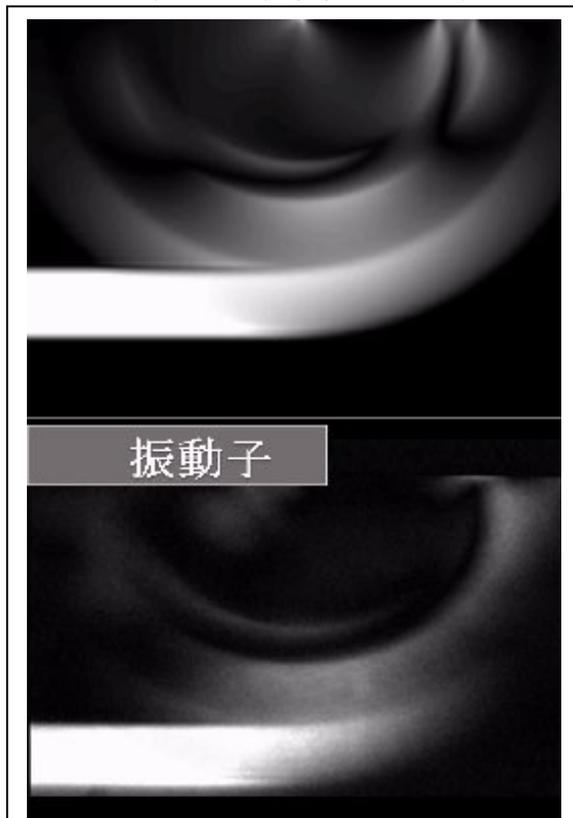
光弾性可視化装置は、偏光を検知する手法だが、原理的に原子間間隔、即ち圧力 (の二乗) に比例した画像が得られる。光の透明体に対する影響は極小さく無視できる。歪 FDTD に圧力表示機能があれば、簡単に比較できる。ただし、光弾性では、せん断歪に対して、即ち横波は、圧縮引っ張りの即ち縦波の 2 倍の輝度となる事、又偏光板の方向が 45 度異なる画像を合成する必要があり合成作業に注意が必要である (円偏光を用いるとこの問題は無いが、一つの波長のみで円偏光するので感度が落ちる)。東北大学故伊達教授と筆者が撮った可視化像はウェブに沢山あるので、比較されると良い。

<http://www1.kcn.ne.jp/~isl/libj.html>

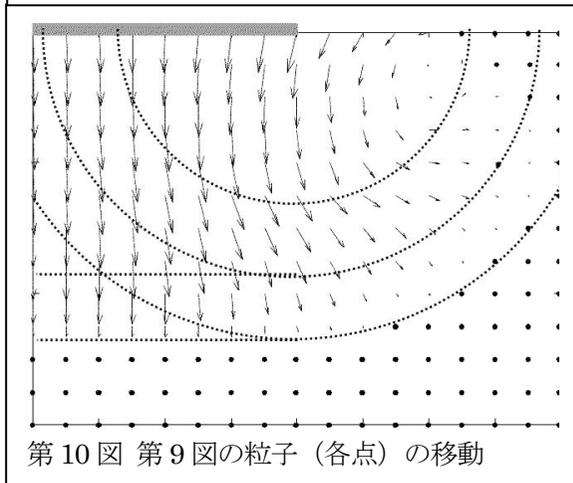
歪 FDTD のプログラムのミスや実用性の確認になる。

送信直後、一定距離伝搬後、欠陥等での反射など何十回と 2000 年頃から比較してきたが、画像のパターンや輪郭で大きな違いは見られなかった。強度に関しては比較できていない。経験上探触子を完全には模擬できない事、光弾性装置の精度が十分でない等が理由である。歪 FDTD では前述の様に、隣り合うメッシュの片方を運動 (変位)、他方を圧力としているので、音の圧力と運動が変換しながら伝わる様子をそのまま計算している。重ね合わせの理を前提にして計算しているので、大気圧より十分弱い現象はほぼ正しい伝搬計算結果になると考えられる。入力音圧波形に関しては、減衰に合わない。

第 9 図に探触子保護膜無、バッキングや温度は理想に近い条件で撮影した参考論文[3]で、振動子から音が出た直後、約 20 mm 伝搬時の



第 9 図 二次元 FDTD シミュレーション(上)と光弾性可視化像(下)の比較



0.5MHz 広帯域の音圧場の比較はしている。何度か述べている様に FDTD に於いて減衰は、マクロな減衰定数を値として与えている為、余り合わない。計算メッシュより小さな部分が

影響する場合は計算に含まれないからであるが、これについてはここでは述べない。FDTD では振動子の端など端部、境界などで強い点が発生するが、実際には綺麗な端は存在し無い。その部分を見れば全体は似ている。なお、音は粒子の変位運動（変位波）であり、第10図に前図のシミュレーション結果の粒子の動き（歪）をベクトルで表現した図を示す。一枚の図では分からないが、前図の波面に対して垂直にベクトルが変化するのが縦波、水平に変化するのが、せん断波即ち横波である。音が伝搬した後、(図では小さい円弧の中の) 歪が残る。この歪は、静的に材料に接した振動子面に力を加えた時の各点の粒子の移動である。

◆FDTD の計算ピッチ

音波に限らず、計算ピッチ、メッシュ・ピッチを波長の $1/4$ 以下にすると殆ど似た結果となる。細かなピッチにするほど精度は上がるが、一定以上細かくしても繰り返し計算誤差が増え、計算時間が、二次元歪 FDTD で二乗、三次元歪 FDTD で三乗に比例して計算点数が急に増える。メッシュを半分にすると約4倍又は約8倍以上の計算時間がかかるので、通常は1波長程度で、パラメータを変えながら計算し、目的の条件が整った時、ピッチを $\lambda/4$ (可能なら $\lambda/10$) 以下と細かくする。材料表面の粗さも $\lambda/10$ 以下なら無視できる。なお、 λ はそのシミュレーションで発生する可能性のある一番遅い波で考える必要がある。縦波の現象を捉える場合でも横波や表面波など遅い波の $\lambda/4$ 以下とする必要がある。遅い波から音速の速い波の BED が発生するからである。

◆FDTD の計算範囲

観測したい範囲をシミュレーション範囲に設定しがちだが、音のシミュレーションでは観測したい領域の、「振動子垂直方向は(振動子幅+2倍)、振動子幅方向は1~2倍以上の範囲」を計算させないと、正しい計算が行われない。第11図にその例として、単に振動子から音を出した場合を示す。振動子は計算領域の端に配置した。(1)が振動子で厚さを増やし、厚さを戻す一波の動作をさせた。表示は変位である。(2)が振動子から出た縦波。(3)は振動子周囲の媒質の

せん断変形による横波。(4)は(2)の縦波の広がり、即ち外 BED。(5)は内側 BED、(6)は(4)(5)の運動で発生したせん断歪による横波で、筆者は「残留横波」と呼んでいる。静的歪である。(3)は(6)と逆方向の変位で(6)は(3)で解消される。(7)の斜に発生した波は、計算範囲を図上方に十分とらなかったため発生した間違い計算である。

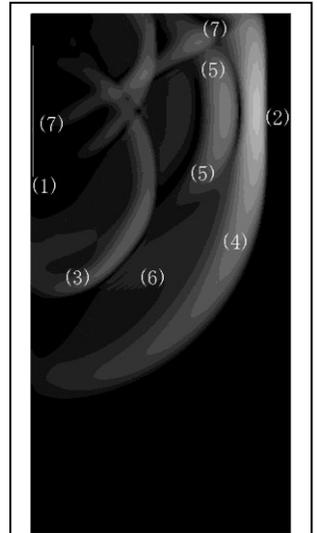
図上方に行った(4)は計算範囲外に出ていくが、それにより

上の方で発生した(6)相当は本来振動子の方に戻ってくる。その戻ってくる分が領域外の為に計算されていない。見たい範囲より広い範囲をシミュレーションしないと、間違った結果を知る事になる。

縦波(外側 BED) は外へ円弧状に広がり、その波自身が発生する BED が、領域内に戻ってくる。その BED も別の BED を発生するかもしれない。波面の端には音圧傾斜があり、それが BED を発生する。

第11図は1GHz クロックの PC で約30秒しかかからず、条件変えて比較するのにストレスは感じない。誤差が無いように広い範囲を計算させると3分要する。狭い範囲での計算で感触を掴み、最終条件の時に範囲を広げると良い得であろう。ただし、ビーム路程が長い場合は、計算時間が日、週単位の事もある。

一般にピストン運動する面からは平面波が出ると考えられる。この音圧場を測定し、FDTD 結果と比較する事が行われる。過去のピストン運動模擬実験で面から理想の平面波が出ている証拠のある場合は殆ど無い。第9図は注意深く設計した探触子からの音で理想に近いが、この試験にしか使えない。比較実験する探触子は可なり検討しないと、実験する意味が無くなる。ピストン運動に関しては別の回に譲る。



第11 振動子を中心からずらして配置した FDTD 計算結果

なお、第 11 図で振動子(1)が通常の振動子同様前後に音を出す、後ろに行った音を境界で消すと、後ろに行った音の BED が観測面に戻ってくる状況が計算されない。ノイズの様な縞が幾つも発生する事が有る。特に波数が長い場合、横波が多く出る媒質(ポアソン比が大きい)の場合である。その場合、振動子を計算領域の中央に置くと正しく計算される。計算領域全体はかなり大きくなる。計算時間と計算結果画像のトレードオフなので、実際は試行錯誤で領域範囲を決めるしかない。

◆歪 FDTD シミュレーションの利用

20 年間、歪 FDTD・ソフトを売ったり使ってきたが、非破壊検査を色々して来た者としては、あまり役立った経験が無い。が、実際の経験との類似性の確証は得られた。

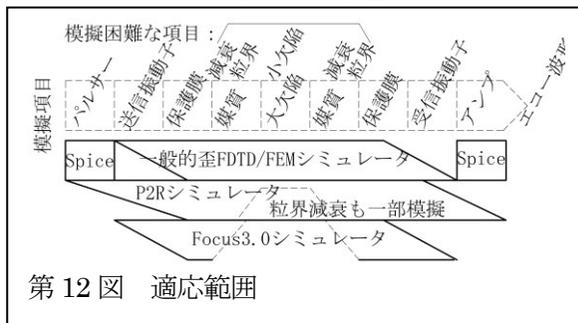
歪 FDTD・ソフトを使うにあたっての一番の問題は設定と計算時間であろう。設定はバッチ・ファイルなどで、条件を変えた複数の設定を自動的に計算させるソフトもあるが、何をすればよいか明確でないと使えない。

簡単な検査は経験でどうすれば良いか、既に知っている。新たな課題は、シミュレーションしようにも、設定や計算に時間がかかる。実際に試験片や探触子を作って試行錯誤した方が手早い。歪 FDTD で何かしらの結果が出て、それと探触子の性能を同じにすることが出来ない。光弾性可視化で観測した探触子近傍の音波を歪 FDTD の入力音にすると、計算結果が実際に近いと言う学者もいる。発生音が実際の探触子とシミュレーション上の探触子は異なる様である。

試験片も例えば実際の亀裂と、模擬の人工亀裂の両方が必要になる。人工亀裂の模擬は歪 FDTD で計算できるであろうが、自然亀裂では音波の一部がミクロの接触で通過してしまうが、歪 FDTD では、その状況を設定できない。

探触子の特性、探傷器の特性が組み込めない事である。一部探触子内を計算するソフトも売られているが、探触子内には電子部品を組み込んだものもあり、更には接着剤の厚さや粗さの差が計算できず、探触子の設計には役に立たない。探触子メーカーも 2000 年頃に各社競って各種シミュレーション・ソフトの使用を試みたが、直ぐに殆どが諦めた。多分現在は設計に応用し

ていないと思われる。既に経験が積み上がっていて、手間と時間がかかり、余り当てにならないシミュレーションする必要もないのが現状だろう。更には受信時、探傷器などのアンプの特性が大きく影響して、探触子に入力される音波波形と画面のエコーとはまるっきり異なる。第 12 図に市販歪 FDTD・ソフト等の概略の適応範囲を示す。パルサーやアンプなど電子回路の波形に対する影響は Spice など電子回路のシミュレータが必要になる(フリーは LTSpice)。10MHz 以上の高周波の場合、電子回路部分のみ



第 12 図 適応範囲

でも実際とは合わなくなり、電磁界シミュレータが必要になる。電子技術者でも解析は困難だ。高周波には使えないが、電子技術者でなくても簡易に設定でき、電子回路、音も含む FDTD ソフト P2R は以下ウェブにある。<http://www.isl.co.jp/downj.html>

一次元近似でほぼ全てを模擬する。透過法では殆ど現実のエコーに近い結果が得られる。二次元、三次元歪 FDTD でシミュレーションしてもなかなか実際に合わない、試作し公開したものである。P2R と二次元三次元、歪 FDTD で媒質内伝播を計算させ組み合わせると、比較的良く合う。ただし、電気知識が有る程度必要で、探傷器等の電気的特性を計測する必要がある。

超音波の入門者にとって、コーナー反射などモード変換で縦波と横波で検出能が違うなど、簡単に理解できない。こういう初心者向けや、一般ユーザー向けのプレゼンテーション用の資料作成には歪 FDTD は便利なツールである。

市販医療用エコー装置や市販非破壊探傷器などの応用機器を使う場合、画面に表示されるエコー波形が最終出力で、音波の波形との関係は明確ではないし、複雑である。従って役に立たない。

なお、エコー波形と送信や受信の音波波形は異なるが、欠陥形状が似ていて、減衰の少ないか同じ程度の場合、過去にエコーとして観測された波形データを送信音圧力相当に設定してシミュレーションすると、比較的实际と合う。筆者も良く使う手である。例えば広帯域探触子をスパイク励振すると、半波の矩形の音波が振動子から出てくる。しかし、エコー波形は殆どの場合 1.5 波である。この 1.5 波のエコーと同じ音が探触子から出たとして歪 FDTD で計算すると、結局、探傷器や媒質減衰のフィルターを通したのと同じ状態、即ちエコー波形が出力される。音波のシミュレーションでなく、エコーのシミュレーションができる。減衰材では距離で波形が変わるので、注意が必要である。

1.5 波と呼ばれる波形、或いは画面で観測される、徐々に振幅が大きくなり、ピークに達して、また徐々に振幅が小さくなる波形の理想形は、ガウシアン・サイン波形とも呼ばれ、帯域が比較的狭い。その為、微分しても、積分しても、ほとんど波形が変わらない。その為、実験研究には使ってはいけない波形である。機器の性能差が表れ難いので、探傷器のメーカーを変えても同様の検査ができる。

一方市販探傷器等を使わない前提なら、新たな検査技術などをシミュレーションできる。

光弾性可視化装置など持たれていない人にとっては、エコー装置や探傷器と言ったフィルターの無い状態の音波が安価に模擬できる。PC だけで出来るので、導入しやすい。

光弾性可視化装置は現実を観測しているが、機器の調整は技術を要する。一方シミュレーションはあくまで「知っている知識による模擬」で、何処まで現実と合うか明確でないが簡便である。式(1)(2)を前提にしているので、その前提が崩れる場合は使えない。強力超音波では実際と異なる計算結果になろう。

書物に書かれている理論、現象を確認する手段の一つとして使える。式(1)(2)のみを前提にしているので、音波に関しては、そこそこ正しい結果であると期待できる。

現状十分な速度が無いが、将来 PC の速度が上がり、又マン・マシン・インターフェイスが充実すると、超音波に関する知識が少ない素人が超音波を利用する障壁を下げられると思われる

る。今までにない音波利用も発展するかもしれない。この段階では超音波のプロは余り必要とされないかもしれない。

非破壊超音波の場合、送・受信の回路やセンサーが絡むので複雑だが、単に歪の伝播を研究する例えば地震波の伝播挙動など地球物理学、地震に因る建物の揺れなど構造物の揺れ、エンジンなどの振動解析等に有効に使われている。

◆あとなぎ

固体-液体など気体液体の境界は歪 FDTD では相互に動かないと仮定している。気体液体では横波が伝わらないので、境界では横滑りが起きると考えられる。気体は熱運動で混ざり合うし、液体でも親和性が良ければ混ざる。こう言った現象を歪 FDTD は考慮していない。従って固体-液体間の境界での計算結果がどの程度実際と合っているか明確でない。この辺は次回の音場やピストン運動の話の時にする。

◆今回知った事

- (1) 自然界は「時間の矢」に支配されている。数学は影響されない。
- (2) パソコンで自然現象を繰り返し計算すると、多くの場合必然的に「時間の矢」が組み込まれる。
- (3) 可視光波長の 1/4 以下、100nm 以下は鏡面に見える。
- (4) 鏡面だから凸凹が無いのではなく、凸凹場見ええないと言える。
- (5) 歪 FDTD では、一番遅い波の波長の $\lambda/4$ 相当 (出来れば $\lambda/10$) 以下の時間ピッチ空間ピッチで計算すると、精度が確保できる。
- (6) 音の伝播を支配する方程式は、ニュートンの運動方程式 (第二法則) とフックの法則である。
- (7) 音の伝搬方向に直角な方向に音圧変化が有ると、音は広がる
- (8) 音は物を通過するとビームに端が出来るので、回り込む。
- (9) 平行面の共振では、全体を往復していると考えると結果が合うだけで、物理的には間違った説明である

音波シミュレーション, FDTD, 実時間, 有限要素法

- (10) 市販 FDTD で細かなピッチで計算すると時間がかかるので、条件探しには1波長程度、条件が整ったら $\lambda/4 \sim \lambda/10$ で計算すると効率的だ。
- (11) 一次元音のシミュレーションの結果から、音の減衰は音速分散によるらしいとも言える。
- (12) 音速分散で粒子の運動エネルギーが圧力エネルギー、即ち熱に変わる様子が一次元歪 FDTD で分かる。
- (13) 多くの市販 FDTD ソフトでは減衰定数をマクロ定数として与えているので、音による残留歪を計算できない。
- (14) セル毎に異なる物理特性を設定すると減衰の模擬が可能だが、現実的計算時間とならない。
- (15) ランジュバン型の様な一部に振動子が有る振動体のパルス駆動では、駆動後直ぐに共振周波数成分は主にならず、時間がかかる事が判る
- (16) 2MHz 以下の斜角探触子の遅延材には、残留エコーを減らすため、減衰の多いアクリルを使う事が多い。
- (17) 歪 FDTD は探触子、エコー装置や探傷器と言ったフィルターの無い状態の音波が模擬できる
- (18) 歪 FDTD の結果からエネルギー保存則を議論するには無理が有る
- (19) 歪 FDTD では、一番遅い波の $1/10$ 波長以下のピッチで計算する必要がある。
- (20) 確かに書物に書かれている現象を確認する手段の一つとして使える。
- (21) 自然亀裂は FDTD では模擬できない。
- (22) 固体-液体など三態間の境界の歪 FDTD の結果は何処まで現実と合うのか不明。
- (23) 歪 FDTD は地球物理学、地震に因る構造物の揺れ、エンジンなどの振動解析等に使われている
- (24) 探傷器で観測されるエコー波形を送信音波波形として FDTD シミュレーションすると結果が実際のエコーと比較的良く合う。
- (25) 1.5波など、ガウシアン・サイン波に近い波形では、冗長性がある。
- (26) 「固定端で音圧波倍になる」と書かれているが、正確には「固定端で音は元の音圧の倍の圧力になる」である。

<参考文献>

- [1] 超音波技術入門—発信から受信まで (2015/04 初版2刷、日刊工業新聞社)
- [2] Y.Udagawa and Gay Reim, "Wave Propagation Simulation in Coarse Grain (attenuative) Materials "IUS 2012 #423
- [3] Y.Udagawa and A.Yamada, "Simulation and Verification Experiment of Radiation Sound Pressure Waveform from Finite Aperture Piezoelectric Transducer", The 34th Symp. Ultrason. Elect. (2013).
- [4] USE2013 Analysis and Observation of Sound Wave Field from Finite Aperture Piezoelectric Transducer - Fact-finding of Misfit between Conventional Analysis and Experiment Observation -