

音波のよもやま話（その34）

（音）波の重ね合わせの原理、干涉、独立性（2）

（南）アイ・エス・エル 宇田川義夫
東北大学大学院教授 三原 毅

◆はじめに

今回は音の重ね合わせの理が怪しいと言う話である。筆者もそうだが、もっともらしい話が書物に書かれていると、それが正しいものと信じてしまう。実際にそれを応用する場面となり、現実と合わないのが、初めて怪しいと気が付く。今回はそう言った話である。

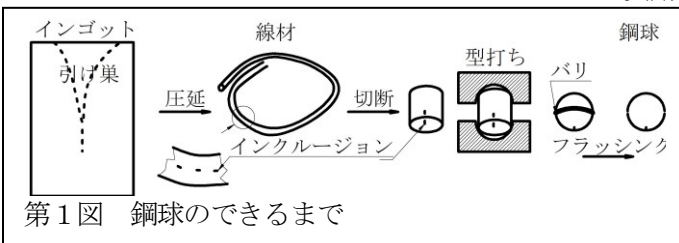
◆ベアリング用棒鋼等の探傷

ベアリングや車のピストンに使う棒鋼は中心に発生する微細キズの検出は重要である。

上記の様な材料は特殊鋼で、厚板など多量に使われるわけでないで、連続鋳造は行われていない。適当な配合の溶けた鉄からインゴットを作る。この際、中央に引き巣ができる。目で見えた凹みの他、最後に固まる中央部には介在物になる様な物質が析出する。インゴットの端は切り落とすが、余り多く切り落とすと生産性が悪くなる。

職人が感で適当に切っている。インゴットの状態で超音波検査が出来ればよいが、粒界サイズがcm単位と大きく、コンクリートより減衰が激しい。100kHz以下の周波数でないと検査できないし、その周波数では大きな欠陥しか見つからない。

第1図にベアリング（鋼球）の製造過程を示す。インゴットの中央部の不良がベアリング形状になるまで、残る可能性が高い事が判る。

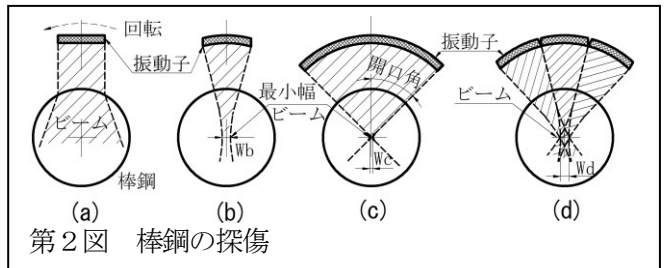


第1図 鋼球のできるまで

車のブレーキ・シリンダなども特殊鋼の棒鋼や線材から作られるが、ピストン部にインクルージョンがあると、油漏れの原因になる。

成るべく製造の上工程で不良を除くのが製造の鉄則で、棒鋼や線材の段階で、主に自動回転超音波探傷装置で検査が行われている。

第2図(a)の様に1970年代初期は平面振動子を回転させて、棒鋼の全周から、前断面を狙っていた。車業界からの品質要求により、中央感度がより高い事が要求された。車のピストンの



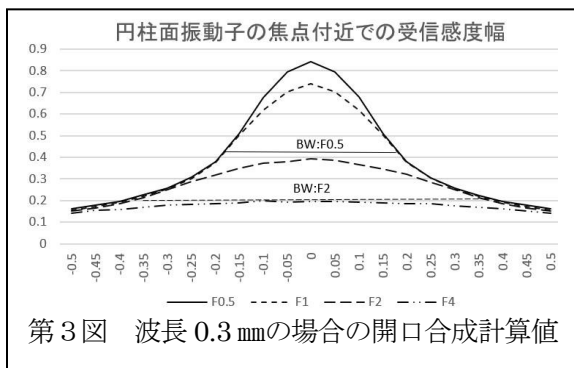
第2図 棒鋼の探傷

油漏れを起こす微細欠陥（数十ミクロン）は(a)では検出できなかった。中央部の検出能向上の為、(b)の様にライン・フォーカス探触子にして改良された。それも探傷器を最大感度近くにして、何とか欠陥を検出できるようになった。インクルージョンの種類によっては鋼材との音響インピーダンスの差が小さく、図(c)の様に振動子周方向幅を大きくして、SNを上げた。しかし、一定以上の幅にしても、効果は上がらなくなる。実用上周方向30度程度が限界の様である。

「音圧の重ね合わせの理」が成り立つなら、図(b)を3つ重ねれば図(c)となるが、作図で重ねてもビーム幅は図(d)の様に殆ど変わらないか、寧ろ広く成る。(c)の様に狭くなる理由にならない。受信特性の違いかもしれないが、「音圧の重ね合わせの理」が怪しい。なお、受信時

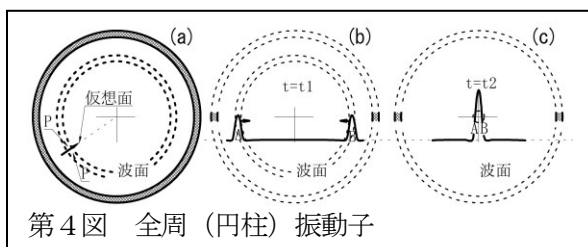
音波重ね合わせ原理、音波干渉、音の独立性

の感度半値幅は開口合成計算で容易に求められ、開口角が 30 度(ビーム収束角 60 度)以上で変化が少なくなり、約 1 波長程度である。



受信特性は、点音源からの音の振動子での開口合成結果で、計算上振動子周方向幅が 45 度程度で、ほぼ波長のサイズになる。実際に開口幅の大きな球面や円柱面振動子、或いはアレイ装置や開口合成装置で確認できる。第3図がその例で振動子幅が広いと半値幅が狭くなる。送受信ビーム幅は受信ビーム幅より狭く、従って、第2図(d)の場合「音圧の重ね合わせの理」は成り立たない様である。

第4図の様に材料が無い場合で全周が振動子



の場合を考え波面を見てみよう。図(a)の様に、波面が振動子から少し進んだ状態で、波面の進む方向に直角(半径)な仮想面を考えると、仮想面の両側の音圧 P は同じなので、音は中心に向って進む。単純に音が中心に向うと、「音圧の重ね合わせの理」が正しければ、中心では音が一点に集中し、無限の音圧になる筈である。

一般的に物理現象で無限大になる事は考えにくい。従って背理法を使えば「音圧の重ね合わせの理」が正しいと考えることが間違っている。

前回重ね合わせの理が適合する話をしたが、正確には、「一次元又は平面波が正面衝突する場合、重ね合わせの理が成り立つ」と言うのが正しい表現では無いと思われる。

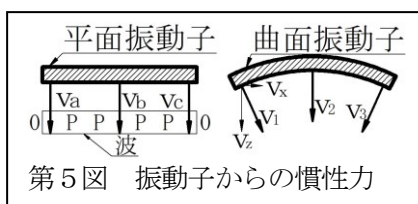
図(b)の様に対向する振動子部分を考えて、前回同様に時刻 t1 では左右の波が中央に向かい、時刻 t2 で波が図(c)の様に中央で衝突する形となる。中央では、波は独立して、互いに通過するのではなく、反射する。その際、前回の話の様に、音は一時的に音圧のみ(静圧)になり、音ではなくなる。この話はどの直径方向でも同じなので、ビームの幅は中央で $\lambda/2$ と考えることができる。フォーカス探触子の送信時最小ビーム幅は $\lambda/2$ となる。

以上を考えると、音には独立性は無く、重ね合わせの理も必ずしも成り立たない。一般書物に書かれている事は間違いである。

慣性力とエネルギーの保存則、即ち重ね合わせの理に反する現象は今まで報告されていない。粒子速と圧力のエネルギー合計の保存は保証されているが、音圧単独での保存=重ね合わせは保証されていない。

◆ニュートンの慣性の法則とビーム

水浸法で振動子はその振動により水を押引きするが、その方向を考えよう。第5図左の様に、平面振動子は面に垂直な運動 $V_a \sim V_c$ をする。フォーカスさせるような運動量は持っていない。



第5図 振動子からの慣性力

音は粒子速度と音圧のエネルギーを変換しながら伝播

し、音圧は方向が無いから、音圧 P により音は音圧 0 の方向に広がる。左右に広がっても左右の運動は方向が逆で足すとゼロになるので、左右の慣性の法則は保たれる。広がった分 $V_a \sim V_c$ の図縦方向成分は減るが、広がった音の図縦方向の成分を足して慣性の保存が保たれる。広がりも含め全ての運動エネルギーは、熱への変換がなければ、振動子から出た最初と同じである。従って、音は広がるだけである。

この広がる圧力により BED(Beam Edge Diffusion and Diffraction、以降BEDとする)が発生し、波数が多い場合内側BEDとメイン・ビームが干渉し多少音圧の高い部分が発生する。しかし、メイン・ビームとBEDは運動の方向が

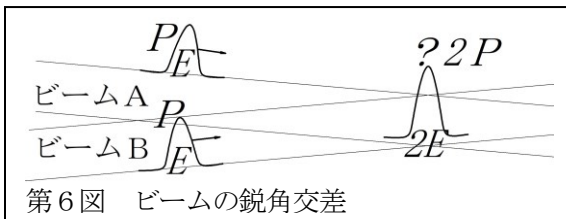
音波重ね合わせ原理、音波干渉、音の独立性

異なるので、今後の回で述べるが、受信波形には余り影響しない。

前述の様な棒鋼用の円柱面振動子では、振動子の運動は図右の様に $V_1 \sim V_3$ と場所により異なる。 V_1 を例にすると、垂直成分 V_z と水平成分 V_x に分けられる。 V_x が音を収束させようとする力である。 V_3 は右から収束させようとする。開口角が広い程、成分 V_x が大きくなるので、より強く収束すると考えられる。音を音圧だけで考えると、理解に苦しむ現象が多い。一方粒子速度は測定法がないし、ベクトル量なので、簡単な図で表せない。

◆音の交差

正面衝突の話は前回したが、今回は第6図の様に音波ビームA,Bが一定の角度で交差する状況を考えてみよう。話を簡単にする為、交差角度はゼロに近いとする。それぞれの音の持つエネルギーを E とすると、重なった時の音のエネルギーはエネルギー保存則から2倍の $2E$ になる。相互に反射していると考えても同じだ。音圧はその定義からエネルギーの平方根に比例するので、 $P \propto \sqrt{2E}$ となる。が、実際に測定してみると元々のビームの音圧の2倍 $P \propto 2\sqrt{E}$



である。実測では、音圧の二乗がエネルギーに比例すると言う基本的理屈が合わない。音圧に関する「重ね合わせの理」が成り立っている様に観測される。粒子速度に関しては測定する方法がないので運動エネルギーの変化は分からないが、音圧は2倍になると考えられる。建築土木では橋桁の「歪」みは重ね合わせの理が成り立つとされ、実際の設計に使われ現実と良く合う。音圧は伝搬する音の「歪」相当なので、音圧は重ね合わせの理が成り立つとの考えも妥当であろう。しかし、フォーカス探触子の様に合わない場合もある。何か我々の気が付いていないファクターが在りそうだ。

◆海の波などの位置エネルギー

高さ h にある質量 m の持つ位置エネルギー Eh は

$$Eh = mgh \quad \text{式(1)}$$

と高さに比例すると習う。 g は重力加速度。実は正確には

$$Eh \approx mgh \quad \text{式(2)}$$

と近似式である。

ニュートンの万有引力によると、 r 離れた質量 M と m の2つの物体間に働く力 F は以下の式となる。

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad \text{式(3)}$$

G は万有引力定数。エネルギーは「力」を位置 r で積分したものです。が、 r を0から積分すると、 r がゼロで無限となり計算できないので、一般には r が無限位置でエネルギーがゼロで最大となる様にして積分する。位置 r でのエネルギー U は

$$U = -G \frac{Mm}{r} \quad \text{式(4)}$$

地球表面を基準に考えると、地球の半径を R として、 m の質量のエネルギーは表面では

$$U_0 = -G \frac{Mm}{R} \quad \text{式(5)}$$

h の高さでは

$$U_h = -G \frac{Mm}{R+h} \quad \text{式(6)}$$

のエネルギーを持ち、その差 Eh は

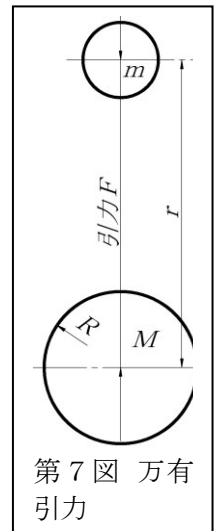
$$\begin{aligned} Eh &= U_h - U_0 = GMm \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) \\ &\approx m \left(\frac{GM}{R^2} \right) h = mgh \quad \text{式(7)} \end{aligned}$$

となる。式 mgh はあくまで近似値である。カッコ内は重力加速度 g 。

多くの物理工学の理論が標準状態、即ち重力や標準大気圧、常温などを忘れて議論する事が多い。その為、事実上の間違いを生ずる。

◆波の重ね合わせのエネルギー

物の位置エネルギーが高さ h に近似的に比例すると、海水などの波のもつエネルギー E_w はどうなるだろうか？



音波重ね合わせ原理、音波干渉、音の独立性

実際の波の断面形状は分らないが、第8図の様な三角波の形をした高さ h_0 波を考える。波の奥行きは単位長さとし、密度は ρ とする。

$$Ew = \int_0^{h_0} \rho(h_0 - h) \partial h = \rho(h_0^2 - \frac{1}{2}h_0^2) = \frac{\rho}{2}h_0^2 \quad \text{式(8)}$$

となり、波高の二乗に比例し、エネルギー保存則を考慮すると音と同じで、波の高さは重ね合わせの理では考えられない事になる。大きな波は発生しない事が知られており、重ね合わせの理が成り立たなくても驚くことは無い。

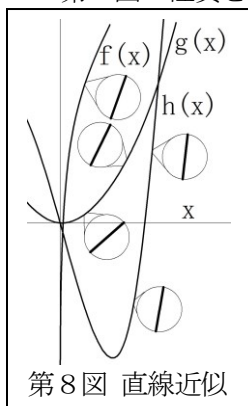
近似式を使わず元々の式を使ってみよう。

$$Ew = \int_R^{R+h_0} GM\rho\left(\frac{1}{R}\right) \partial R = GM\rho(\log R - \log(R+h_0)) \approx \frac{GM\rho}{R \log(e)} h_0 \quad \text{式(9)}$$

となり、摩訶不思議、近似式は波高に単に比例してしまう。

第8図を見よう。関数をグラフで示したものの、関数がどんな式でも、その部分は、その関数の傾きの直線で近似できる。従って変化が少ない場合、どんな物理現象も「あたかも重ね合わせの理」が成り立つように観測される。ただし、音の場合、エネルギーが異なるタイプ（音圧と粒子速度）に変換しながらの場合の多くは「重ね合わせの理」成り立たない。主要因が一方である場合は近似として成り立つ。特に音の場合は、音と音が出会うと、場合によっては「運動の無い静圧」や「圧力の無い運動」と音ではなくなり「重ね合わせの理」成り立たせなくしている。

物理の多くの式は原理から考えると、計算が困難だったり、話がややこしくなるので、数学で近似計算に使うテーラー展開やマクローリン展開を使って近似式を求める。これらの近似はこの第8図の性質を使っている。



本来は誤差論を含め式の理論構築をするべきだが、誤差論自体の話が複雑、計測誤差まで議論するとキリが無いので、一般には行われていない。

物理の場合、原則近似は許されない。理論展開すると辻褄が合わない事が多く発生する。一方

工学では、実務に役立てば近似式が使える。理屈が判らなくても実験式でも良い。例えば光の屈折の法則、スネルの法則は実験に依る近似式である。実際に近似式が多いが、その使える条件（仮定）が明記されてない場合が多く、それが色々な問題を引き起こす。

エネルギー保存則が成り立つ限り、特定のパラメータがエネルギーとの関係が関数で示される場合、その一部では、パラメータの重ね合わせの理が成り立つ事になる。

◆音の場合のエネルギー

音の場合も音圧 P は大気圧 P_0 の上に載っている、音の圧力のエネルギーは大気圧のエネルギー E_0 を加算したものが音の圧力エネルギーと考えると辻褄は合う。音の圧力の部分のエネルギーと運動の部分の粒子速度のエネルギーは音の圧力のエネルギーと同じであることは変わらない。

第 4 図ビーム A の持つ圧力のエネルギー U_p は

$$U_p = E_0 + E$$

音圧は

$$P = \sqrt{ZU_p} = \sqrt{ZE_0} \sqrt{1 + \frac{E}{E_0}}$$

テラー展開を使って

$$P=P_0+P_s \approx \sqrt{ZE_0} \left(1+\frac{E}{2E_0}-\frac{1}{8}\left(\frac{E}{E_0}\right)^2 \dots\right)$$

となる。通常の探傷器と探触子の組み合わせでは音圧は大気圧の $1/100$ 以下である。従ってカッコ内の第二項以降を無視でき、音の音圧部分 P_s は音の部分のエネルギー E' に比例する事になる。従って、音の交差点で 2 倍の音圧となる。大気圧下で微小音圧の場合

$$P \propto E$$

であり、大気圧より十分大きな場合

$$P^2 \propto E$$

となる。

前回の音の衝突の話は、音圧が小さな場合は少し修正を加えなければならない。その場合、大気圧を含む音圧のエネルギーが粒子速度のエネルギーより十分大きいので、運動エネルギーを無視すればよいので、話は非常に簡単になる。前回同様結論を簡単に出すと、後で間違いも発生するので、現在分かった事は、正確には

音波重ね合わせ原理、音波干渉、音の独立性

「大気圧下の微弱な2つの平面波の音圧は重ね合わせの理が成り立つ」ようである。

大きな音圧の実験は非常に困難である。また、空中では負圧、即ち真空以下では音は伝播しない。大気下の境界（欠陥を含む）も大気圧より十分小さな音圧は重ね合わせの理が成り立つ。液体中では凝集力の為に負圧も伝わるがほぼ同様で、気体液体中では強力超音波の伝播は必ず正圧で行われる。固体中は原子間結合力より音の力は十分弱く、負圧も伝わり線形と観測される。

上式が成り立つのかどうかのエビデンスが欲しいが、現状通常の探触子で発生する音圧は最大0.1気圧程度である。超音波溶接の様に、単に強力な超音波は発生可能だが、BEDの影響の無い大面積の平面波の生成と干渉実験は難しい。過去にこう言った実験が行われた形跡が無い。筆者はそう言った実験を何度かチャレンジしているが目的の音圧に達していない。数年後に結果が出ると思われる。

音波に限らず技術上の問題から、十分なエビデンスがある理論はほぼ無い。どの理論式も疑って見るのが良いであろう。

前回までに音と熱とは同じ分子の運動である事を話した。常温中の気体中では、大気圧相当の熱運動が有り、そこに音が乗っかる。固体中では、原子は、原子同士が機械的結合をしており、既に固体となる為、非常に大きな結合エネルギーを持っている。その為、音の重ね合わせが高い精度で成り立っている様である。結合エネルギーは色々な経験モデルがあるが、レナードジョーンズ・ポテンシャルが代表であり、歪は応力の7~13乗に比例する非線形である。

◆あとかき

音圧が低い場合、近似として「重ね合わせの理」が成り立たつ事を話した。次回はこの近似を前提にした音場を模擬計算する音のFDTD法シミュレーションするに関して述べる。

◆今回知った事

- (1) ベアリングやピストンの素材は棒鋼が多く、フォーカス探触子で数十ミクロンの欠陥が検出されている。

- (2) 開口角30度以上でエコーの幅は波長程度になる。
- (3) 曲面振動子の場合、振動子の周囲からの内向きの力成分が収束の原因である。
- (4) どんな関数でも近似式は直線且つ線形。
- (5) 「運動の無い静圧」や「圧力の無い運動」になる事が「重ね合わせの理」成り立たせなくしている。
- (6) 大気圧より弱い通常の探傷器と探触子の組み合わせでは、媒質内と境界で「音圧の重ね合わせ」が成り立つと考えて良い。

<参考文献>

超音波技術入門—発信から受信まで(2015/04初版2刷、日刊工業新聞社)

Y.Udagawa and A.Yamada, "Simulation and Verification Experiment of Radiation Sound Pressure Waveform from Finite Aperture Piezoelectric Transducer", The 34th Symp. Ultrason. Elect. (2013).

USE2013 Analysis and Observation of Sound Wave Field from Finite Aperture Piezoelectric Transducer - Fact-finding of Misfit between Conventional Analysis and Experiment Observation -